清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：基于Lasso的人脸识别算法

系　　别：电子工程系

专　　业：电子信息科学与技术

姓　　名：熊英

指导教师：苏光大 教授

2010年 6月

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签　名：熊英　导师签名：[illegible]　日　期：2010.6.28

中文摘要

近年来，人脸识别因其在法律、安防以及商业等各个领域的诱人应用前景而受到广泛重视。随着模式识别、图像处理和计算机视觉等学科的飞速发展，人脸识别技术也经历了从研究到应用的跳跃式进步。虽然很多经典算法已经经历了近二十年的研究，开始成熟并步入商业应用的时代，但人脸识别方面的新算法仍然层出不穷。本文研究了压缩采样和稀疏表示等当前信号处理领域的最新进展，将其应用于人脸识别问题，提出基于Lasso的人脸识别算法，以取得更高的识别效果和更鲁棒的识别性能。

文章从Lasso问题的提法出发，给出了它的一个严格数学定义。接着讨论了解决Lasso问题的几类直观的前向回归算法尝试，进而引出了高效的LARS算法。进一步，我们简单探讨了Lasso问题在压缩采样中的特点与应用。

详细探讨了Lasso问题与算法后，本文讨论了人脸图像的稀疏表示模型，并给出了具体表示方法。接着从人脸的稀疏表示出发，介绍了重建这一表示的最小化ℓ_1范数方法，并阐释了其与Lasso问题的具体联系。

最后，本文探讨了用于稀疏表示的各种人脸特征，从最简单的下采样、随机采样特征，到经典的特征脸方法，再到本文提出的表达力更强的约束采样特征。除了纹理特征外，文章还阐述了几何特征在人脸识别中的作用，并给出了特征融合的具体方法。

文章提出的新算法在通行数据库中进行了严格测试，算法表现优异，识别率达到99%以上。我们的算法还嵌入到实际系统中并参加了公共安全展览，收到较好的反响。

关键词：人脸识别　Lasso问题　稀疏表示　约束采样　几何特征　特征融合

ABSTRACT

With its promise applications on a wide range of areas such as law enforcement and public security, face recognition technology (FRT) receives significant attention in recent years. The rapid developments in fields of pattern recognition, image processing and computer vision greatly enhance the feasibility of FRT. Although many traditional algorithms have been well studied for more than two decades and step into the commercial application stage, countless new algorithms are proposed every year. In this thesis, we introduce a new face recognition algorithm based on Lasso, with the breakthrough technology in compressive sensing and sparse representation, which significantly improve the recognition efficiency and accuracy.

The thesis starts with the formulation of Lasso, and gives a strict definition. Then we explore some intuitive forward algorithms and introduces the powerful LARS algorithm. We also briefly discuss its application on compressive sensing.

After elaborating the Lasso problem and algorithm, we explore the sparse representation model of human face, and introduce an efficient representation method. Based on this model, we introduce the reconstruction algorithm with ℓ_1 minimization, and explain its relationship with Lasso.

Finally, we discuss the different features for human face, from the simple downsample and random-sample feature, to the well-known eigenface (PCA feature). We also introduce our own distinctive feature with the constraint-sample technology. Besides the texture, we discuss the significance of geometry information in human face recognition, and introduce a detailed feature fusion algorithm.

The new algorithm proposed in this thesis performs well in the benchmark database, achieving the accuracy rate more than 99%. We also embed our algorithm in a real system, and display it in a public security exhibition, receiving tremendous appreciation.

Key words: Face recognition Lasso problem Sparse representation Constraint sample Geometry feature Feature fusion

目 录

第 1 章 引言 1

1.1 人脸识别背景与意义 1

1.2 人脸识别问题的定义 1

1.3 人脸识别经典方法概述 2

1.4 本文的贡献与创新 3

1.5 论文其余部分安排 4

第 2 章 Lasso问题与LARS算法 5

2.1 Lasso问题与压缩采样 5

2.2 预处理与归一化 6

2.3 两种前向回归算法 7

2.3.1 前向选择算法 7

2.3.2 前向梯度算法 8

2.4 LARS算法 8

2.4.1 几何直观 8

2.4.2 代数定义 10

2.4.3 伪代码 12

2.4.4 算法复杂度分析 12

2.5 改进LARS算法求解Lasso问题 14

2.5.1 Lasso改进 14

2.5.2 正Lasso改进 16

2.6 测试与讨论 16

2.6.1 简单回归测试 16

2.6.2 信号处理应用测试 17

2.6.3 几点问题与改进 18

第 3 章　基于稀疏表示模型的人脸识别 21
3.1　人脸图像的稀疏表示 21
3.2　稀疏表示方法 21
3.2.1　多光照下的线性模型 21
3.2.2　全局稀疏性表示 23
3.3　基于稀疏表示的人脸识别 24
3.3.1　由Lasso问题求解稀疏表示 24
3.3.2　由稀疏表示判定目标人 26
3.3.3　识别算法伪代码 27
3.4　基于稀疏表示的认证算法 27
第 4 章　特征选取 29
4.1　人脸特征概述 29
4.2　下采样特征 30
4.3　PCA特征 31
4.4　随机采样特征 33
4.5　约束采样特征 35
4.6　几何位置特征 37
4.7　特征融合 38
第 5 章　实验结果 41
5.1　通行人脸数据库 41
5.1.1　YaleB人脸数据库(Extended) 41
5.1.2　AR人脸数据库 43
5.1.3　CAS-PEAL人脸数据库 44
5.2　传统特征下算法的识别率 44
5.3　约束采样下算法的识别率 45
5.4　融入几何特征后的识别效果 45
第 6 章　总结 49
插图索引 51

表格索引 53
参考文献 55
致　谢 57
声　明 59
附录 A　外文资料的调研阅读报告 61
A.1　文献[1]的阅读报告 61
A.2　文献[2]的阅读报告 65
A.3　文献[3]的阅读报告 65
A.4　文献[4]的阅读报告 67
A.5　文献[5]的阅读报告 70
A.6　文献[6]的阅读报告 72
A.7　文献[7]的阅读报告 73
在学期间参加课题的研究成果 77

第 1 章　引言

1.1　人脸识别背景与意义

人脸识别可以算上当今计算机视觉与图像处理技术中一个最为成功且广泛的应用，在近年来，它引发了无数学者的兴趣并受到极大的关注，这从该领域的论文数量与专业会议迅猛增涨的趋势可见一斑。人脸识别受到广泛关注的主要原因有两个，一是它在法律、安防以及商业等各个领域的诱人应用前景，另一个则是在近30年来对图像信息处理技术的研究与发展使得识别算法越发准确精巧，识别系统越发简单稳定[8]。

从需求与前景角度看，在当代社会，为满足信息安全，很多领域或部门都迫切需要一个数据安全、用户友好、使用便捷、保护用户隐私又能够确认用户权限的身份认证系统。例如，在银行系统中，用户需要提供自己的身份证或护照以证明其身份，在邮箱等其他网络产品中，用户需要提供用户名和密码来获取他的账户登录权限，等等。但是，密码和证件等信息容易被盗用，因此，人们往往需要一个更为可靠的认证机制，使得只有使用者本人才能够获得其账户权限，而不能被他人冒领。尽管当前已经找到了极为可靠的生物特征，如指纹、虹膜等，但这些特征都要求测试者配合检测，而很多情况下（如安防系统中），测试者的配合往往成本很高甚至不可实现。因此，基于人脸的生物特征识别（简称人脸识别）受到越来越多的重视，因为他能够在用户不配合甚至不知情（如盗窃、抢劫）的情况下获取他们的身份信息。

1.2　人脸识别问题的定义

人脸识别的一般性定义为：给定一幅静止图像或一段视频，在人脸数据库中查询或认证场景中的一个或多个目标人[8]。解决此问题需要用到场景分割、人脸检测、特征提取、模式识别等多项技术。人脸识别总体分为辨认(identification)、验证(verification)和目标人识别(watch list)三大类型：

辨认 通过查询数据库中的人脸特征，与输入的人脸特征进行比对来确定输入人脸对应的未知人身份的过程。属于一对多的生物特征识别。

验证 检验用户是否为其所声明的身份。对于未知身份的X，其声称身份A，将X与数据库中的身份A的人脸特征进行匹配，如果满足系统设定的阈值，则验证接受，否则验证拒绝。属于一对一的生物特征识别。

目标人识别 判别一个未知身份的待测人样本是否在监事名单上，如果判断待测人在监视名单上，则将确定该待测人脸样本的身份。属多对多的生物特征识别。

在现行的人脸识别技术应用中，从输入的格式上看，可以是静止图像，也可以是动态视频。其中视频识别以图像识别为基础，但两者在技术上也有较大差别。在本文中我们只讨论静止图像的识别问题。从输入的性质看，可以是受控(controlled)输入，也可以是非受控(uncontrolled)输入。其中非受控输入往往采用人脸对齐(alignment)技术转换成受控输入再进行识别，在本文中，我们只讨论对齐归一后的人脸识别，这也是人脸识别中的核心问题。

在人脸归一化后，我们假定在姿态上已经对准，因此在识别中不再考虑姿态不同。本文着力解决的问题在于人脸的光照变化，即在不同光照下，同一个人的人脸图像表现出的一定的甚至较大的差别[9][10]。本文的任务在于发掘相同人在不同光照下采集到的人脸的共性（如距离较小的特征等），从而达到有效的查询和认证。

1.3 人脸识别经典方法概述

在过去近30年的研究中，人脸识别方法得到了飞速的发展。

目前研究最为广泛也是最为流行的技术多是基于外观(appearance-based)的方法[11]。使用基于外观方法是，输入数据一般表示成一幅$m \times n$的二维图像，并将人脸看做一个$m \times n$维的向量空间。一般而言m和n都很大（几百），向量的维数也就很高，因此最常用的方法是对这个高维空间进行降维，得到它的紧致表示。

最著名的降维算法应数由学者Turk等提出的特征脸(Eigenface)方法[12]，它应用主成分分析(Principal Component Analysis, PCA)技术，取得人脸空间的最强特征表示，再将每幅人脸在这些特征上进行投影，得到一个紧致性表示。

与特征脸类似，费希尔脸(Fisherface)方法[13]也受到广泛的重视，它通过线性判别式分析(Linear Discriminant Analysis, LDA)技术，将不同人的人脸图像投影到尽量远的线性子空间中，进而算得费希尔线性判别式(Fisher Linear

Discriminant)，取得易于区分的分类判决。

但是最近研究发现，人脸投影图构成的往往是一个局部线性，而全局非线性的高维空间，因此用一个流形(manifold)表示更为合适，相应的流形学习的方法也被越来越多的研究。一种有效的流形学习方法为局部保持投影(Locality Preserving Projections, LPP)[14]，它将人脸空间投影到一个保持局部信息的线性空间。新的线性空间中的基向量（特征向量）称为拉普拉斯脸(Laplacianfaces)[15]，并将人脸图像投影到这组向量空间中，得到一个紧致的表示集，用于识别和认证。

虽然流形学习的方法能够保持人脸空间的局部信息，获得非常紧致且高区分度人脸特征，但这类方法往往计算复杂，非线性效应明显，这些都限制了他们的应用。目前更多的学者倾向将人脸识别看做一个线性模式识别问题，将人脸进行稀疏表示(sparse representation)，采用信号处理中的压缩采样技术，并获得较好的识别结果[1][2][3]。与传统方法不同，这类方法不再要求将人脸尽量紧致地表示成一个低维空间，而是将其投影成一个非常稀疏的高维向量，并通过ℓ_1范数最小化的方法，几乎无误差地恢复该向量，从而进行身份的查询和认证。

本文借鉴上述各种方法，并以稀疏表示方法为主体，对人脸识别算法做了进一步研究。

1.4 本文的贡献与创新

在本文中，我们介绍了当前信号处理中应用广泛的压缩采样技术，讨论了Lasso问题的定义和特性，通过LARS算法给出了一个高效的解决，并分析了算法的精确度与复杂度。我们将Lasso问题成功地应用在人脸识别系统当中，对算法进行了详细分析与讨论，给出了一个高效的解决方案，并将算法进行了的软、硬件实现。本文还研究了当前人脸识别中的各种常用特征，讨论了他们各自的优缺点，并提出了约束采样技术。该技术能够有效提高目前通行特征的区分度和表示力，与基于Lasso的人脸识别算法相互配合，极大地提高系统的识别率与计算效率。此外，我们还在纹理特征中融入了几何信息，更进一步提高了识别的准确性。新算法在通行数据库中获得很高的识别率，在实际场景中也有较好的身份认证水平。

1.5 论文其余部分安排

本文第2章介绍了信号处理中的压缩采样与还原问题，给出了Lasso问题的确切定义，并讨论了通过LARS算法求解Lasso问题的具体方法。

第3章讨论了人脸识别中紧致表示与稀疏表示的区别，介绍了人脸的稀疏表示模型及它与Lasso问题的关系，并给出基于Lasso解决人脸识别问题的确切算法。

第4章介绍了当前通用的人脸特征提取方法，并引入了更具区分性的约束采样特征和几何形状特征，还给出了特征融合的具体方法。

第5章给出本文提出的算法在当前各通行数据库中的识别结果，通过比较证明了算法的优越性。

最后，第6章对全文进行了总结。

第 2 章　Lasso问题与LARS算法

在本章中，我们将探讨信号处理的前沿问题——压缩采样。我们从Lasso问题出发，讨论解决Lasso问题的一般思路，给出两种直观的前向算法并引出LARS算法，进而介绍由LARS算法解决Lasso问题的改进。接着我们将用这些算法实现了简单的压缩采样重建技术。

2.1　Lasso问题与压缩采样

Lasso (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) 问题最初由学者 Tibshirani于1996年提出[6]，用于描述一类有约束的优化问题。下面给出问题的具体提法。

设$\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \cdots, m$是一组自变量，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$是因变量。用自变量对因变量进行线性回归，并限定回归系数$\boldsymbol{\beta}$的ℓ_1范数不超过某个阈值t。它的数学表达式为：

$$(\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \arg\min \left\| \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{x}_i - \alpha \right\|_{\ell_2} \quad \text{subject to } \|\boldsymbol{\beta}\|_{\ell_1} \leq t \tag{2-1}$$

写成矩阵形式：

$$(\alpha, \boldsymbol{\beta}) = \arg\min \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \alpha\|_{\ell_2} \quad \text{subject to } \|\boldsymbol{\beta}\|_{\ell_1} \leq t \tag{2-2}$$

其中$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$，取常数$\alpha = \bar{y} - \bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\beta}$。

可见，Lasso问题是限定了ℓ_1范数的线性回归问题。这类问题可以很好地描述当前流行的压缩采样(Compressive Sampling)技术。事实上，本文的人脸识别算法也可以看作压缩采样恢复算法的一个变体。因此我们在本节简单地介绍压缩采样，以及他与Lasso问题的联系。

压缩采样打破了传统采样定理的束缚，使得以远低于奈奎斯特(Nyquist)频率进行采样并恢复信号成为可能，因此在近些年的信号压缩、模式识别等领域得到非常广泛的应用[4] [5]。一个采样问题可以用下面方程描述：

$$y_k = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}_k \rangle, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2-3}$$

其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$为待测信号，$\phi_k$为采样函数（传统时域-频域采样中即为傅里叶级数），$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积。

如果采样函数是线性的，(2-3)式可写作

$$\boldsymbol{y}_{n\times 1} = \boldsymbol{\Phi}_{n\times m}\boldsymbol{x}_{m\times 1} \tag{2-4}$$

其中$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n\times m}$为采样矩阵。压缩采样中，我们希望$n \ll m$，从而进行大幅度的数据压缩。采样后得到结果$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，我们希望能完好地恢复被测信号$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$，即数据还原。

此时(2-4)式为一个不定方程组（方程个数少于未知数个数），一般情况下方程的解是不确定的，即不可能做到无损还原。信号处理中，我们（符合事实地）假定$\boldsymbol{x}$是稀疏的，即$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$中只有少数元素非零。这种情况下，Candes、Tao等证明了，只要采样矩阵$\boldsymbol{\Phi}$满足一定稀疏性条件，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$就可以被无损地恢复[16][17]。恢复方法为求解下面一个优化问题：

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} \qquad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x} \tag{2-5}$$

或存在误差时

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} \qquad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}\|_{\ell_2} < \epsilon \tag{2-6}$$

即在（近似）满足方程(2-4)的所有解中，ℓ_1范数最小的即是所恢复出的最优稀疏解$\boldsymbol{x}$。因此压缩采样的核心即为求解优化问题(2-5)或(2-6)。

易见，Lasso问题(2-2)与优化问题(2-6)是对应的[18]（将(2-6)中的$\boldsymbol{\Phi}$换做$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{x}$换做$\boldsymbol{\beta}$），即(2-6)中的每一个ϵ对应(2-2)中的一个最优解，(2-6)中的每一个最优解对应(2-2)中的一个t。因此求解Lasso问题(2-2)即可得到优化问题(2-6)的最优解。

Efron等提出的LARS(Least Angle Regression)算法能够高效地求解Lasso问题[7]。在本章的后续部分将介绍LARS算法解决Lasso问题的具体过程。

2.2 预处理与归一化

为方便叙述并获得稳定的数值解，我们对(2-2)式进行预处理和归一化，消去常数α，并使得向量$\boldsymbol{y}$和向量$\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots, m$零均值且$\ell_2$范数归一。

首先取

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \bar{y} \tag{2-7}$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \boldsymbol{x}'_j = \boldsymbol{x}_j - \bar{x}_j \tag{2-8}$$

令

$$\alpha = \bar{y} - \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \beta_j \tag{2-9}$$

则(2-2)式等价于

$$\boldsymbol{\beta} = \arg\min \|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}\|_{\ell_2} \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\beta}\|_{\ell_1} \le t \tag{2-10}$$

又取

$$\chi_j = \|\boldsymbol{x}'_j\|_{\ell_2} \qquad \boldsymbol{x}''_j = \frac{\boldsymbol{x}'_j}{\chi_j} \tag{2-11}$$

并令

$$\beta'_j = \beta_j \chi_j \tag{2-12}$$

则(2-2)式等价于

$$\boldsymbol{\beta}' = \arg\min \|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{X}''\boldsymbol{\beta}'\|_{\ell_2} \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\beta}'\|_{\ell_1} \le t' \tag{2-13}$$

我们称(2-13)式为归一化的Lasso问题，它的自变量和因变量均为零均值，且自变量ℓ_2范数归一。我们以后所讨论的均为归一化的Lasso问题，为方便表述，去掉(2-13)式变量中的撇（′）。

2.3 两种前向回归算法

在讨论LARS算法前，我们阐述两种更为简单直观的前向（Forward）回归算法， LARS以它们为基础。

2.3.1 前向选择算法

前向选择（Forward Selection）是一种贪心算法。它在自变量$\boldsymbol{x}_j, j = 1, 2, \cdots, m$中选择与因变量$\boldsymbol{y}$相关度最高的一个$\boldsymbol{x}_k$，用$\boldsymbol{x}_k$逼近$\boldsymbol{y}$，得到$\tilde{\boldsymbol{y}} = \beta_k \boldsymbol{x}_k$，

其中

$$\beta_k = \frac{\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}_k\|_{\ell_2}} = \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y} \rangle \qquad (\|\boldsymbol{x}_k\|_{\ell_2} = 1) \tag{2-14}$$

即$\tilde{\boldsymbol{y}}$为$\boldsymbol{y}$在$\boldsymbol{x}_k$方向上的投影。令残差$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}$，则$\boldsymbol{y}'$与$\boldsymbol{x}_k$正交。之后以$\boldsymbol{y}'$为因变量，$\boldsymbol{x}_j, j = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, m$为自变量重复上述回归过程，直到$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$或所有自变量都被使用后，算法结束。

以二元回归为例，如Figure 2.1上图所示。$\boldsymbol{y}$与$\boldsymbol{x}_1$的相关度较高，故先用$\boldsymbol{x}_1$逼近，再将残差用$\boldsymbol{x}_2$逼近。

这种算法对每个自变量只需进行一次运算，因此效率高、速度快。但容易看出，当自变量不相互正交时，算法给出的解不是最优的。这里的最优指自变量子空间最优，即如果$\boldsymbol{y}$落在$\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x}_m$张成的子空间中，最优解即为$\boldsymbol{y}$本身，如果$\boldsymbol{y}$不落在自变量子空间中，最优解为$\boldsymbol{y}$在子空间上的投影。

2.3.2 前向梯度算法

前向梯度（Forward Stagewise）与前向选择算法类似，每次取相关性最大的自变量$\boldsymbol{x}_k$逼近因变量$\boldsymbol{y}$。但不同的是，前向梯度算法并不进行“一次到位”地逼近，而是每次前进一个较小的值ϵ。即$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} - \epsilon \boldsymbol{x}_k$。然后重新对$\boldsymbol{y}'$进行回归运算，此时自然也不需要将$\boldsymbol{x}_k$从自变量中除去，因为下一步它仍然可能是相关度最高的。如此继续，直到残差$\boldsymbol{y}'$不再减小或已减小到某一范围之内。

Figure 2.1中间一幅图给出了这种情况。初始时$\boldsymbol{y}$与$\boldsymbol{x}_1$的相关度较高，由于每次只逼近一小步ϵ，因此需要多次用$\boldsymbol{x}_1$进行逼近，直到$\boldsymbol{x}_2$的相关度变得比$\boldsymbol{x}_1$更大（临界点处$\boldsymbol{y}'$在$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$的角分线上）。之后交替用$\boldsymbol{x}_2$和$\boldsymbol{x}_1$进行逼近，一直达到（或非常接近于）因变量$\boldsymbol{y}$。

这种算法能够给出最优解，且ϵ越小，给出的解就越精确，但算法的复杂度也随ϵ的减小而增大。一般情况下，为了保证精度，ϵ往往取得很小，因此算法的复杂度往往很高。

2.4 LARS算法

2.4.1 几何直观

前一节看到，前向选择算法“过分贪心”（overly greedy），丢失了自变量的相关性信息，虽然计算简单，但所得的结果不一定是最优的。而前向梯度算

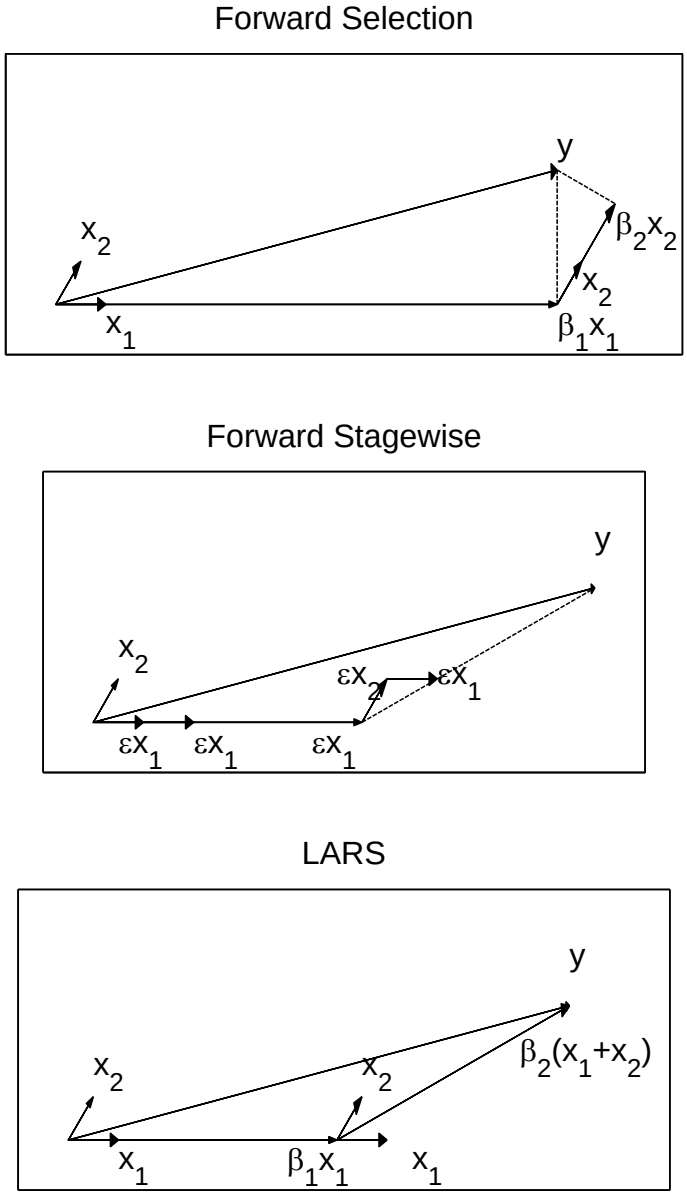


图 2.1　三种回归算法的几何直观

法又过于谨慎，虽然给出了子空间最优解，但计算复杂度很高。因此我们结合两种方法的优点，设计出“步子”不是很小，以降低计算复杂度，又不是很大，以保留相关性信息的算法。这正是LARS算法的初衷。

从直观上看，LARS算法先找到与$\boldsymbol{y}$相关度最大的自变量$\boldsymbol{x}_k$，并用其对$\boldsymbol{y}$逼近。直到出现另一个$\boldsymbol{x}_l$，它与$\boldsymbol{y}$的相关度和$\boldsymbol{x}_k$与$\boldsymbol{y}$的相关度相等，此时开始以$\boldsymbol{x}_k$与$\boldsymbol{x}_l$的角分线方向逼近$\boldsymbol{y}$。同样，当出现第三个$\boldsymbol{x}_p$与因变量的相关度足够大时，也将它加入到逼近队列中，取三个向量共同的角分线方向（这里“角分线”指的是高维向量的平分线，具体见后面的代数定义）。如此继续，直到残差足够小或已取得了所有自变量，算法结束。

如Figure 2.1下图所示。初始时$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{y}$的相关度较高，用它进行逼近，直到$\boldsymbol{y}$出现在$\boldsymbol{x}_1$与$\boldsymbol{x}_2$的角分线上，此后用$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$的角分线方向逼近因变量$\boldsymbol{y}$。

因此，LARS算法保持了前向选择算法的复杂度（最多只需要m步，m为自变量的个数），同时保证了结果是自变量子空间中最优的。

2.4.2 代数定义

前面的几何分析虽然直观，但高维向量“角分线”的定义需要用具体的代数算式给出。此外每次逼近的步长（即何时下一个自变量的相关度增大到与正在计算的自变量相关度相同）也需要计算得到。

按照(2-13)式的记号，设$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$为自变量组成的矩阵，$\boldsymbol{y}$是因变量。$\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}\rangle$定义为自变量与因变量的相关（注意$\|\boldsymbol{x}_k\|_{\ell_2} = 1$）。$|\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}\rangle|$越大，相关度越高。设$A = \{j_1, \cdots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$是一个指标集，定义

$$\boldsymbol{X}_A = [s_{j_1}\boldsymbol{x}_{j_1}, \cdots, s_{j_k}\boldsymbol{x}_{j_k}] \in \mathbb{R}^{n\times k} \tag{2-15}$$

其中s_{j_l}定义为

$$s_{j_l} = \begin{cases} 1 & \text{if } \langle \boldsymbol{x}_{j_l}, \boldsymbol{y}\rangle > 0 \\ 0 & \text{if } \langle \boldsymbol{x}_{j_l}, \boldsymbol{y}\rangle = 0 \\ -1 & \text{if } \langle \boldsymbol{x}_{j_l}, \boldsymbol{y}\rangle < 0 \end{cases} \tag{2-16}$$

即$\boldsymbol{X}_A$为从$\boldsymbol{X}$中取出的A指标集里的列向量，并使其与$\boldsymbol{y}$同向。下面我们定义$\boldsymbol{X}_A$中向量的“角分线”。令

$$\boldsymbol{G}_A = \boldsymbol{X}_A^T\boldsymbol{X}_A \qquad A_A = \left(\mathbf{1}_A^T\boldsymbol{G}_A^{-1}\mathbf{1}_A\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2-17}$$

$$\boldsymbol{w}_A = A_A\boldsymbol{G}_A^{-1}\mathbf{1}_A \qquad \boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{w}_A \tag{2-18}$$

其中$\mathbf{1}_A$为k维所有元素均为1的列向量（k为A中元素个数）。从上面的定义容易证明，$\boldsymbol{u}_A$为单位向量，且

$$\boldsymbol{X}_A^T\boldsymbol{u}_A = A_A\mathbf{1}_A \quad \text{or} \quad \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_A\rangle = A_A, \forall j \in A \tag{2-19}$$

即$\boldsymbol{u}_A$与所有$\boldsymbol{X}_A$中的元素相关度相同，为A_A，因此我们把$\boldsymbol{u}_A$定义成$\boldsymbol{X}_A$中向量的角分线。

假设当前A中的自变量与因变量相关最大，算法沿$\boldsymbol{u}_A$方向逼近$\boldsymbol{y}$，我们现在计算下一个自变量进入A的位置，即沿$\boldsymbol{u}_A$走多远时另一个（A之外的）自变量与A中的自变量跟$\boldsymbol{y}$有了相同的相关度。设上一步结束时算法的估计是$\boldsymbol{\mu}_A$，则

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A) \quad \text{or} \quad c_j = \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A\rangle \tag{2-20}$$

为当前各自变量与因变量的相关。若设

$$C = \max_j\{|c_j|\} \tag{2-21}$$

为当前最大相关，则根据假定，A中自变量与$\boldsymbol{y}$的相关都为最大相关，即

$$\begin{cases} |c_j| = C & \text{for} \quad j \in A \\ |c_j| < C & \text{for} \quad j \notin A \end{cases} \tag{2-22}$$

现在沿$\boldsymbol{u}_A$方向逼近$\boldsymbol{y}$，即

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(\gamma) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A - \gamma\boldsymbol{u}_A \tag{2-23}$$

随着γ的增加，$\tilde{\boldsymbol{y}}(\gamma)$减小，进而与各自变量的相关度也减小，但减小的速度不同。记

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}_A \quad \text{or} \quad a_j = \langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{u}_A\rangle \tag{2-24}$$

为各向量相关度的减小速度，容易看出A中向量以同样速度减小，即 $a_j = A_A(\forall j \in A)$。于是可以算出$\tilde{\boldsymbol{y}}(\gamma)$与各自变量的相关度

$$\langle \boldsymbol{x}_j, \tilde{\boldsymbol{y}}(\gamma)\rangle = \begin{cases} C - \gamma A_A & \text{if} \quad j \in A \\ c_j - \gamma a_j & \text{if} \quad j \notin A \end{cases} \tag{2-25}$$

$\gamma = 0$时，根据假定，$\tilde{\boldsymbol{y}}(0) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A$与$A$中自变量相关度最高，但随着$\gamma$增大，$A$之外的自变量与$\tilde{\boldsymbol{y}}(\gamma)$相关度可能变得更高，临界点处为$|c_j - \gamma a_j| = C - \gamma A_A$，对

某$j \notin A$。因此算法沿$\boldsymbol{u}_A$方向前进的长度为

$$\hat{\gamma} = \min_{j \notin A}^{+} \left\{ \frac{C - c_j}{A_A - a_j}, \frac{C + c_j}{A_A + a_j} \right\} \tag{2-26}$$

其中min上面的加号表示只计算集合中正数的最小值。于是算法的下一步估计为

$$\boldsymbol{\mu}_{A_+} = \boldsymbol{\mu}_A - \hat{\gamma} \boldsymbol{u}_A \tag{2-27}$$

每个A中的自变量相应增加$\hat{\gamma} \boldsymbol{w}_A$，即

$$\boldsymbol{\beta}_A = \boldsymbol{\beta}_A + \hat{\gamma} \boldsymbol{w}_A \tag{2-28}$$

之后则需要引入新的元素

$$A_+ = A \cup \{\hat{j}\} \tag{2-29}$$

其中$\hat{j}$为让(2-26)式取得最小值的j。至此算法进入下一次逼近，用A_+代替A重复上述步骤，直到残差足够小或所有自变量都被使用过。

为保证完整性，我们指出，如果算法使用所有自变量后仍未达到因变量$\boldsymbol{y}$，说明$\boldsymbol{y}$不在自变量子空间中，此时只能给出自变量子空间中的最优解。算法的最后一步取

$$\hat{\gamma} = \frac{C}{A_A} \tag{2-30}$$

此时LARS算法退化为最小二乘法。

2.4.3 伪代码

根据前面的代数定义，容易写出算法的伪代码，见Algorithm LARS。

2.4.4 算法复杂度分析

记m为需要拟合的自变量的个数，n为自变量的维数，即$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$。

Algorithm LARS中，2至6行为初始化，复杂度集中在第2行的归一过程，因为需要对每一个元素去平均和范数归一，因此复杂度为$O(mn)$。

下面分析算法主要部分，即7至16行while循环的复杂度。易见循环中复杂度集中在第8行(2-17)式的计算中（涉及矩阵相乘，求逆等操作）。在第k次

Algorithm 1: LARS

Input: variable $\boldsymbol{y}$ dependent on variables $\boldsymbol{X}$, error tolerance ϵ

Output: Estimate $\boldsymbol{\beta}$, s.t. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta}$

begin
  Normalization($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{y}$);
  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}$;
  $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}^T\tilde{\boldsymbol{y}}$;
  $C = \max_j\{|c_j|\}$;
  $\hat{j} = \arg\max_j\{|c_j|\}, A = \{\hat{j}\}$;
  while *($\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\ell_2} < \epsilon$) and ($|A| <= m$)* **do**
    find $A_A, \boldsymbol{w}_A, \boldsymbol{u}_A$ using equation (2-17) and (2-18);
    find c_j, C using equation (2-20) and (2-21);
    if $|A| < m$ **then**
      find $\hat{\gamma}, \hat{j}$ using equation (2-26);
    else
      find $\hat{\gamma}$ using equation (2-30);
    $\boldsymbol{\beta}_A = \boldsymbol{\beta}_A + \hat{\gamma}\boldsymbol{w}_A$;
    $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} + \hat{\gamma}\boldsymbol{u}_A, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}$;
    $A = A \cup \{\hat{j}\}$;
return $\boldsymbol{\beta}$

循环中，$|A| = k$。(2-17)式计算$\boldsymbol{G}_A$时，用到$\boldsymbol{X}_A^T \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 与$\boldsymbol{X}_A \in \mathbb{R}^{n\times k}$相乘，按照一般矩阵乘法，复杂度为$O(k^2n)$。 (2-17)式计算$A_A$时用到矩阵$\boldsymbol{G}_A \in \mathbb{R}^{k\times k}$求逆，使用“全选主元阵原地求逆算法”的复杂度为$O(k^3)$。所以第$k$次循环的复杂度为$O(k^3 + k^2n)$。现在按$m$与$n$的大小关系进行讨论。

- 当$m \le n$时，while循环最多运行m次，第m次循环的复杂度为$O(m^3 + m^2n)$，因此总复杂度为$O(m^4 + m^3n)$。注意当$m \ll n$时，算法的复杂度关于n是线性的。即在一个高维空间中以较少的自变量进行拟合时，复杂度关于维数是线性增长的。
- 当$m > n$时，按照稀疏性条件，我们假定m个自变量张满空间$\mathbb{R}^n$，while循环最多运行n次即结束。（关于这一假定我们将在2.6.3节进一步讨论。）此

时第n次循环的复杂度$O(n^3 + n^2 n) = O(n^3)$，算法总复杂度$O(n^4)$。注意这里的复杂度与自变量个数m是无关的，如果在压缩采样中，即$m \gg n$，算法也可以在较小的复杂度下求解优化问题。①

2.5 改进LARS算法求解Lasso问题

虽然前面给出的LARS算法与Lasso问题并没有特别直观的联系，但Efron等证明，将LARS算法略微改进可以得到Lasso问题甚至正Lasso（Positive Lasso）问题的确切解[7]。

2.5.1 Lasso改进

如果LARS算法给出的某个$\boldsymbol{\beta}$是Lasso问题的解，容易证明一个必要条件为

$$\text{sign}(\beta_j) = \text{sign}(c_j) = \text{sign}(\langle \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A \rangle) \tag{2-31}$$

即Lasso解要求与当前逼近保持同向，Efron等还证明了这一条件也是充分的。因此，只需在LARS算法中加以改进，消除异号情况，即可得到Lasso解。

设算法当前给出的解为$\boldsymbol{\beta}_A$，算法前进方向为$\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{X}_A \boldsymbol{w}_A$，前进过程中解的增加为

$$\boldsymbol{\beta}_A(\gamma) = \boldsymbol{\beta}_A + \gamma \boldsymbol{w}_A \tag{2-32}$$

出现β_j与c_j异号时必有β_j与w_j异号，$\gamma_j = -\frac{\beta_j}{w_j}$，于是最早出现异号的步长为

$$\tilde{\gamma} = \min_{j \in A}^{+} \left\{ -\frac{\beta_j}{w_j} \right\} \tag{2-33}$$

当$\tilde{\gamma} < \hat{\gamma}$时，异号将出现，此时需要将相应的$\tilde{j}$从$A$中除去。

可以证明，加入上面的修正后，算法将给出Lasso问题的确切解[7]。改进后算法如Algorithm Solve Lasso。

就复杂度而言，由于增加了第16到18行的一段，使得每次循环中$|A|$有可能减小，即有可能从A中删除元素，因此改进后的Lasso问题求解比原始LARS算法复杂度略高，由于时间精力有限，这里不做具体的理论分析。但从有限的实验

① [7]中给出的算法复杂度比前面分析的略小：$m < n$时为$O(m^3 + m^2 n)$，$m \gg n$时为$O(n^3)$。文中没有进行详细分析，我们猜测其可能使用了更先进的矩阵运算技术，或者在每次循环中可以利用递推的方法计算A_A和$\boldsymbol{u}_A$。（也不排除原文有误的可能性。）

Algorithm 2: Solve Lasso

Input: variable $\boldsymbol{y}$ dependent on variables $\boldsymbol{X}$, error tolerance ϵ

Output: Lasso solution $\boldsymbol{\beta}$ for (2-2)

begin
  Normalization($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{y}$);
  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}$;
  $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}^T \tilde{\boldsymbol{y}}$;
  $C = \max_j\{|c_j|\}$;
  $\hat{j} = \arg\max_j\{|c_j|\}, A = \{\hat{j}\}$;
  while *($\|\tilde{\boldsymbol{y}}\|_{\ell_2} < \epsilon$) and ($|A| <= m$)* **do**
    find $A_A, \boldsymbol{w}_A, \boldsymbol{u}_A$ using equation (2-17) and (2-18);
    find c_j, C using equation (2-20) and (2-21);
    if $|A| < m$ **then**
      find $\hat{\gamma}$, $\hat{j}$ using equation (2-26);
    else
      find $\hat{\gamma}$ using equation (2-30);
    find $\tilde{\gamma}$, $\tilde{j}$ using equation (2-33);
    if $\tilde{\gamma} < \hat{\gamma}$ **then**
      $\boldsymbol{\beta}_A = \boldsymbol{\beta}_A + \tilde{\gamma}\boldsymbol{w}_A$;
      $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} + \tilde{\gamma}\boldsymbol{u}_A, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}$;
      $A = A - \{\tilde{j}\}$;
    else
      $\boldsymbol{\beta}_A = \boldsymbol{\beta}_A + \hat{\gamma}\boldsymbol{w}_A$;
      $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} + \hat{\gamma}\boldsymbol{u}_A, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}$;
      $A = A \cup \{\hat{j}\}$;
return $\boldsymbol{\beta}$

结果看，这种$|A|$减小的现象不常发生。因此我们猜测复杂度不会有大幅提高，渐进复杂度很可能与LARS算法是相同的。

2.5.2 正Lasso改进

所谓正Lasso问题是指在Lasso问题的基础上要求所求得的各系数β_i都是正的（非负的）。这种问题的应用也比较普遍，因为很多情况下，我们已知自变量与因变量为正相关（有非负贡献）。这时，只需要将Algorithm Solve Lasso稍加改动，将选择绝对值相关最大变为直接选择相关最大即可。具体而言，将第5行改为$C = \max_j\{c_j\}$，第6改为$\hat{j} = \arg\max_j\{c_j\}, A = \{\hat{j}\}$，第11行不再使用(2-26)，而改为下式

$$\hat{\gamma} = \min_{j\notin A}^{+}\left\{\frac{C - c_j}{A_A - a_j}\right\} \tag{2-34}$$

通过上面两条改进，即可给出正Lasso算法的确切解。算法的复杂度也与Lasso改进的复杂度一致。

2.6 测试与讨论

由于MATLAB强大的矩阵运算能力和友好的编程风格，本文中我们先编写了算法的MATLAB程序。接着在C++中编写了“全选主元矩阵原地求逆”程序，并将算法进行了C++实现。我们分别对两个程序的正确性做了测试，并以此为基础进行了压缩采样实验，得到了较好的结果。在后续章节的人脸识别算法中，使用的就是这里通过测试的MATLAB和C++代码。

2.6.1 简单回归测试

为保证自变量矩阵满足相应的稀疏性条件，我们生成20×20的正交矩阵$\boldsymbol{U}$，并取它的前9行$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}(1:9,:) \in \mathbb{R}^{9\times 20}$，取因变量$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_3 - 2\boldsymbol{x}_5 \in \mathbb{R}^9$。$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$是一个不定方程，一般有无穷多个解。前文指出，如果当做Lasso问题求解，可以恢复方程的最稀疏解，即我们设定的最优解。事实上，我们指出，采用LARS算法就可以达到这一目的。运行C++程序（取$\epsilon = 10^{-2}$），给出解$\boldsymbol{y} = 0.999939\boldsymbol{x}_3 - 1.99985\boldsymbol{x}_5$，其余变量的贡献均小于预先设定的double类型精度10^{-12}或严格为0。可见，LARS算法能够较好地胜任稀疏回归问题。

为了测试正Lasso修正，我们使用更具有挑战性的数据。重新生成20×20的正交矩阵，取前7行$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{7\times 20}$。令$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}_8 + 7\boldsymbol{x}_{10} + \boldsymbol{x}_{15} \in \mathbb{R}^7$。由于采样点数更少，稀疏性更差（参与贡献的因变量更多），所以这个回归问题较前面一个更困难。事实上，LARS算法已不能给出最优解，其运行结果为$\boldsymbol{y} =$

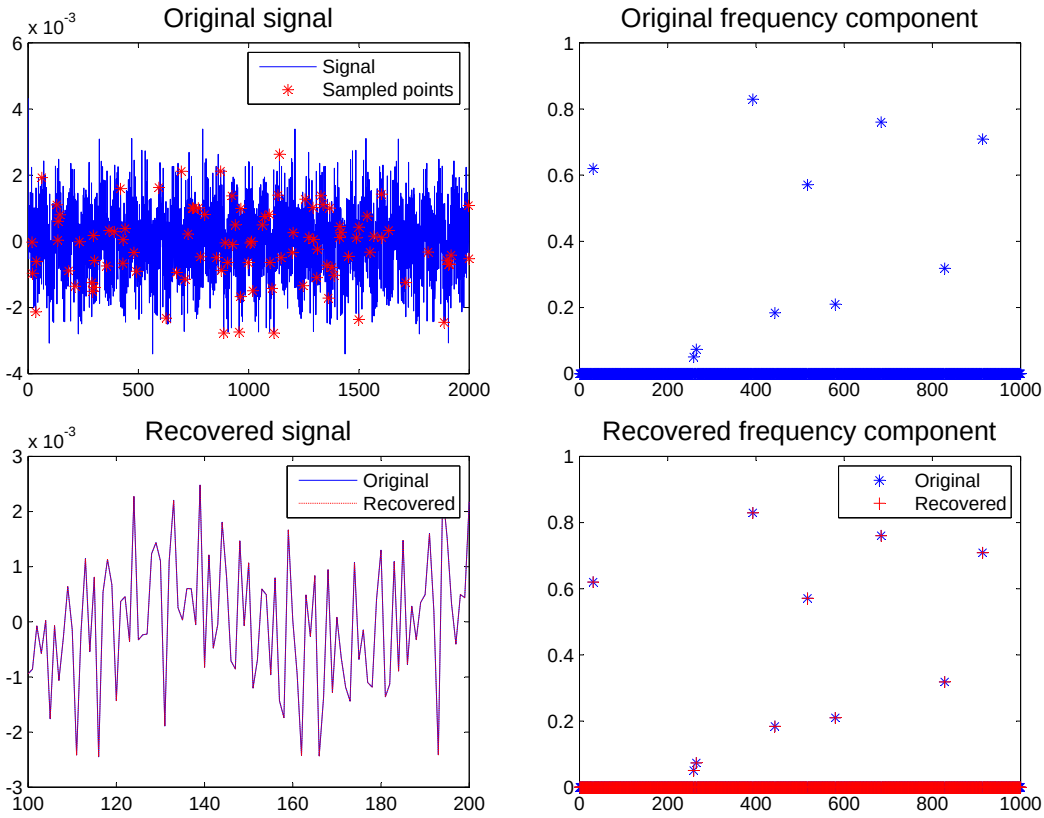


图 2.2　压缩采样恢复测试

$-0.127205\boldsymbol{x}_4+2.74908\boldsymbol{x}_8+5.93359\boldsymbol{x}_{10}-0.258555\boldsymbol{x}_{12}-1.78801\boldsymbol{x}_{16}$。但采用正Lasso修正时，一方面由于Lasso问题较LARS修正有更好的鲁棒性，另一方面加入了所有自变量贡献为正这一信息，使得算法仍然能够给出最优解，结果为 $\boldsymbol{y} = 2.99983\boldsymbol{x}_8 + 6.99985\boldsymbol{x}_{10} + 0.999911\boldsymbol{x}_{15}$。

2.6.2　信号处理应用测试

为进一步测试算法的正确性，并印证第2.1节提到的压缩采样理论，我们用更为真实的信号处理数据进行测试。

对一个时域信号（Figure 2.2左上图），我们假定它在频域是稀疏的（Figure 2.2右上图），这种假定对很多现代信号处理是成立的。这是一个信号是频带受限的，最高频率为$n = 1000$，在频带中只有$S = 10$个非零频率，但这些频点可能分布在频带的任意位置。按照传统的采样定理，采样频率必须达到最高频率的两倍，即需要$2n = 2000$次采样才能完好地恢复原始信

号， Figure 2.2左上图蓝色即为2000次采样的时域图。但压缩采样指出，当信号频谱稀疏时，可以采用远少于采样定理要求的次数采样并恢复原始信号。Figure 2.2左上图红色的星号表示在时域进行的$m = 100$次随机采样，我们用这100次采样值恢复原始信号。为避免复数运算，我们用余弦基$\cos(2k\pi/N)$代替指数基$\exp(j2k\pi/N)$进行信号恢复，恢复结果见Figure 2.2。左下图为时域恢复（的一小段），右下图为对频域信号的恢复，恢复结果均与原始信号完全相同。这一实验验证了压缩采样技术的正确性，使得以远小于采样定理的频率进行采样并恢复原始信号成为可能。

理论上，在$S \ll n$的情况下，只要采样次数达到$m \geq C \cdot S \cdot \log(n/S)$即可以概率（几乎）为1完好地恢复原始信号[5]。这与我们的实验结果相一致。

2.6.3 几点问题与改进

本章最后，我们指出算法实现中遇到的几点问题并给出相应的解决方案。

自变量基的相关性 在一般的回归问题中，经常假定自变量构成一组线性无关基，从而求解因变量在这组基张成空间中的最优解。然而当自变量个数多于方程个数时，自变量不会完全独立。取而代之的是相应的正交性条件（如UUP，即uniform uncertainty principle[4]）。这种自变量的相关有时会使得LARS算法的矩阵运算非正则，导致错误。例如当$\boldsymbol{X}_A$增大到不再线性独立而算法还没有结束（误差没有低于ϵ）时，矩阵$\boldsymbol{G}_A$奇异，无法求逆，进而后续的$A_A, \boldsymbol{u}_A$等均无法计算。

为消除此种情况，在循环中需要加入判断，即在对矩阵$\boldsymbol{G}_A$原地求逆时需要判断全选主元的值，如果低于某一阈值，则算法终止，并返回当前给出的最优解。实验表明这种方法能够有效避免因矩阵奇异引发的问题。

Lasso改进发生的病态 Lasso改进中加入了对当前估计的判断，使得参数估计集A可能减小。实验表明，在极少数情况下，这种减少将导致病态。即每次A增加若干自变量，接着又删除一些，再增加，再删除。虽然估计值$\boldsymbol{\mu}_A$一直向因变量$\boldsymbol{y}$靠拢，但这种运动非常缓慢。

这种病态可能源自LARS算法的基本原理，目前我们没有找到引发它的本质原因，能够做的改进只能是设定算法循环的最大次数，使得其计算足够多次后自动跳出，避免算法无休止地运行下去。

复数域扩展 目前给出的LARS算法以及Lasso改进只适用于实数域，其本质原

因在于算法只考虑了内积$\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y} \rangle$为正和为负的两种情况。即我们目前认为向量$\boldsymbol{x}_k$对向量$\boldsymbol{y}$要么有正贡献，要么有负贡献（这个属性记录在符号集$\{s_i\}_{i=1}^m$中）。但引入复数后，内积$\langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y} \rangle$也可能为复数，同时有长度和辅角两个特性。此时自变量对因变量的贡献更复杂，需要对符号集$\{s_i\}_{i=1}^m$的定义进行相应的修正，从而使算法适应复数运算。由于时间和精力所限，我们没有实现这一部分的修正。

不过我们指出，对时域-频域采样（傅里叶变换）这类特殊的复数信号处理问题，目前给出的实数算法完全可以满足要求。事实上，只要将$\exp(\pm j2k\pi/N)$用$\sin(2k\pi/N)$和$\cos(2k\pi/N)$代替，即可完成任务。因此当前算法已经可以解决一般的信号处理问题。

第 3 章　基于稀疏表示模型的人脸识别

基于前面讨论的Lasso问题，我们在本章中详细探讨人脸的稀疏表示模型。我们将阐述简约性对人脸识别的重要意义，给出人脸稀疏表示的具体方法，并以此为基础，给出具体的识别算法。最后，我们还将给出一个基于稀疏表示的人脸认证算法。

3.1　人脸图像的稀疏表示

简约性(parsimony)在模式识别中一直占据着重要的地位。为达到简约，传统的方法对识别目标进行紧致(compact)编码，用最少的数据表达一幅待识别的目标（人脸图像）。如特征脸(Eigenfaces)[12]（也称PCA方法）将一幅人脸图用最少的几个特征脸进行线性叠加，将叠加系数作为紧致的表示方法，进而通过计算欧式距离进行人脸识别。此外，费希尔脸(Fisherface)[13]和拉普拉斯脸(Laplacianface)[14][15]也用了类似的表示方法。

然而，最近的研究结果表明，当对识别目标采用稀疏(sparse)编码时，也可以达到简约的效果[1][2][3]。这里的稀疏性是指，在表示一幅图像的所有系数中，只有很少的一部分系数非零（即大部分系数严格等于零）。稀疏编码与紧致编码的区别在于：前者可能用很多系数来表示一幅图像，但这些系数绝大多数为零，少数非零系数可能出现在任何位置；而后者只需要用少数系数来表示一幅图像。文献[1]证明，图像的稀疏编码同样能够保证表示的简约性，而且，借助第2章讨论的Lasso问题及算法，可以很好地解决编码重建和图像识别问题。

本章的后续部分将介绍图像稀疏表示的具体方法，以及这种表示下的人脸识别与Lasso问题的联系和求解。

3.2　稀疏表示方法

3.2.1　多光照下的线性模型

数学上可以证明，当物体的表面反射特性符合Lambertian特性时，这个物体在不同光照下的投影图构成一个凸的低维线性空间[9]，一般将这个空间称为光照锥(Illumination Cone)。实验发现，人脸材质（皮肤）有良好的漫反射特性，

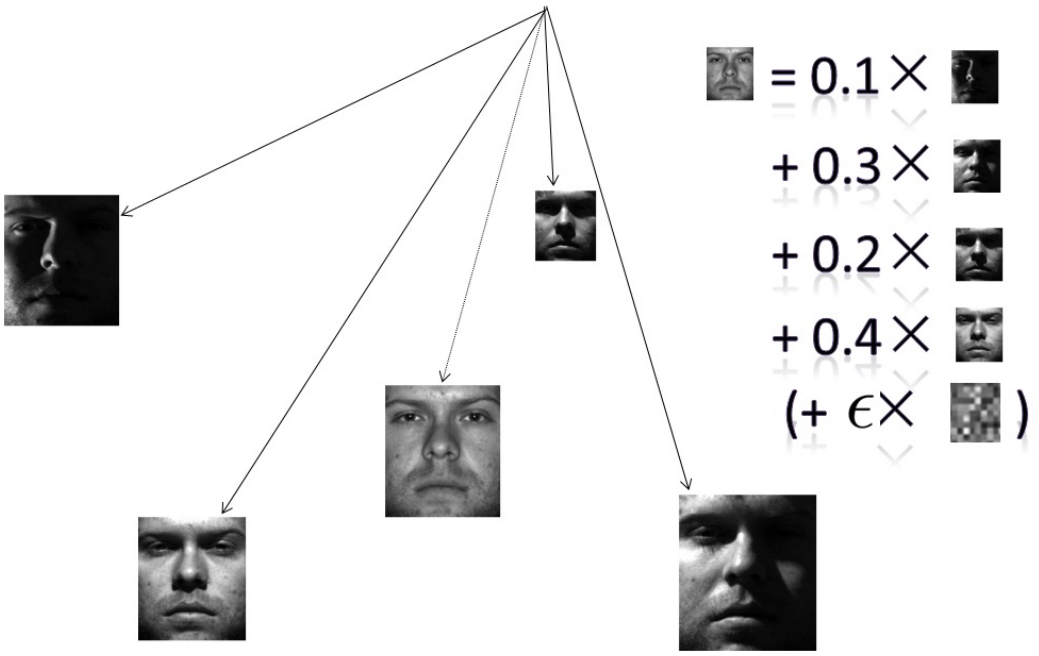


图 3.1　人脸光照锥

符合Lambertian要求，所以人脸在不同光照下的投影视图构成一个低维线性光照锥[10]。

如图3.1所示，同一人脸在不同光照下的投影视图构成一个光照锥，适当地选定几幅图片作为基(base)，则锥内其他任意图像都可以由基线性组合表示出来。（当然，不排除表示的过程中存在误差，即图中ϵ项）。

在工程运算中，我们用一个m维向量$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$表示一张人脸图，这里的向量可以是将图中所有像素按顺序排列得到的，也可以是图像的某个特征向量（关于人脸特征的提取将在第4章讨论）。这样，设我们有某人的n张不同光照的图像$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^m$，对于一幅新图像$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$，应有

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \tag{3-1}$$

其中α_j为线性表示系数。

写成矩阵形式，令$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$，则有

$$\boldsymbol{v}_{m \times 1} = \boldsymbol{A}_{m \times n} \boldsymbol{x}_{n \times 1} \tag{3-2}$$

其中$\boldsymbol{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^T \in \mathbb{R}^n$为系数向量。

时事上，方程(3-2)中的$\boldsymbol{x}$是图像$\boldsymbol{v}$的一个紧致性表示，因为在低维空间中，往往有$n \ll m$，即$\boldsymbol{x}$的维数比$\boldsymbol{v}$的维数低得多。接下来，我们将在这样一个紧致性表示的基础上，给出图像的稀疏表示。

3.2.2 全局稀疏性表示

上小节中，针对一幅待识别图像，我们给出了它由同一个人不同光照下图像的线性表示，这种表示是紧致的。实际情况中，数据库中存储的是所有人的多光照图像。在本小节，我们将给出待识别图像在整个数据库中的全局表示，并证明说个表示是稀疏的。

设数据库中有k个人，第i个人有n_i幅不同光照下的图像。对于第i个人，他的n_i幅图像将提取出n_i个m维特征向量，记作$\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{i,n_i} \in \mathbb{R}^m$。其中第一个下标$i$表示第$i$个人，第二个下标$j$表示他的第$j$幅图像。同样，我们用矩阵来表示这些向量：

$$\boldsymbol{A}_i = [\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{i,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{i,n_i}] \in \mathbb{R}^{m \times n_i} \tag{3-3}$$

于是，对每个人，都对应一个矩阵$\boldsymbol{A}_i$，共有k个人，则有k个这样的矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k$，将这些矩阵级联起来，得到一个表示整个数据库中所有照片的大矩阵：

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k] \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{3-4}$$

其中$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$。

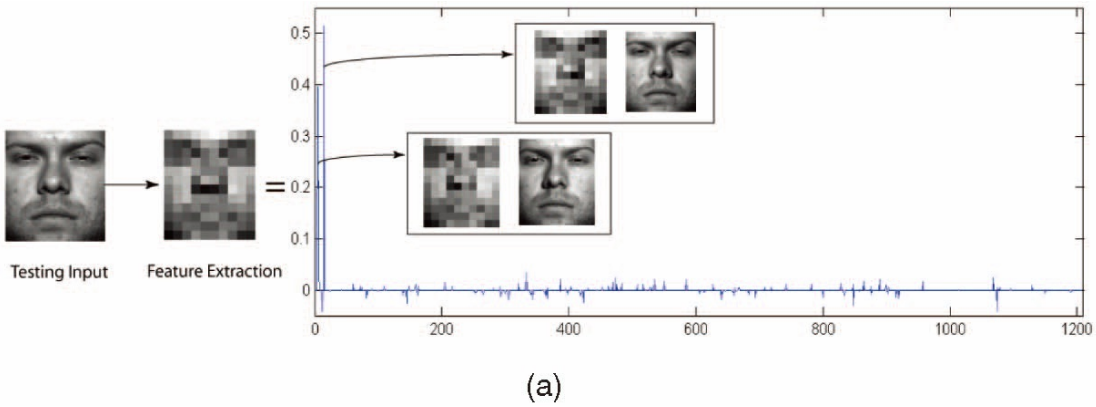
现在我们考虑一幅待识别图像在全局中的表示。设待识别图像来自第i个人，他的特征为$\boldsymbol{y}$，则由方程(3-1)

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j \boldsymbol{v}_{i,j} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_{i,1} + \alpha_2 \boldsymbol{v}_{i,2} + \cdots + \alpha_{n_i} \boldsymbol{v}_{i,n_i} \tag{3-5}$$

将这幅图像放在全局中，同一个人对它的贡献如(3-5)式，不同人对它的贡献为0，于是有

$$\boldsymbol{y} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_{1,1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_{i-1,n_{i-1}} + \alpha_1 \boldsymbol{v}_{i,1} + \alpha_2 \boldsymbol{v}_{i,2} + \cdots + \alpha_{n_i} \boldsymbol{v}_{i,n_i} + 0 \cdot \boldsymbol{v}_{i+1,1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_{k,n_k} \tag{3-6}$$

上式即为待识别图像在数据库中的全局表示。



(a)

图 3.2　全局稀疏表示，最小化ℓ_1范数

容易写成矩阵形式

$$\boldsymbol{y}_{m\times 1} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} \tag{3-7}$$

其中$\boldsymbol{x} = [0,\cdots,0,\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\cdots,\alpha_{i,n_i},0,\cdots,0] \in \mathbb{R}^n$。

我们指出，当数据库中人数较多，即k较大时，方程(3-7)给出的线性表示是稀疏的。因为n维向量$\boldsymbol{x}$中只有n_i个非零元素，且$n_i/n \approx 1/k \ll 1$，即$n_i \ll n$。也就是说，向量$\boldsymbol{x}$中非零元素只占非常少的一部分。至此，我们给出了待识别图像的一个稀疏表示。

图3.2[①] 给出了全局稀疏表示的示意。对于输入图像，将其下采样作为人脸特征。将它用全局图像线性表示时，只有同一个人不同光照的图像有较大的贡献，其余图像的贡献都接近于0（不确切为0是因为有误差存在）。

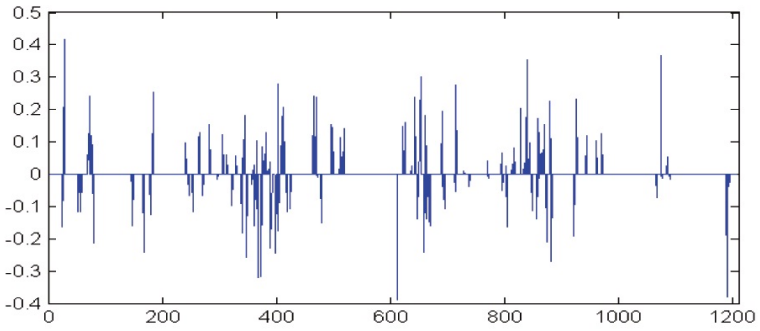
3.3　基于稀疏表示的人脸识别

3.3.1　由Lasso问题求解稀疏表示

在实际的人脸识别操作中，给定一个含有多光照人脸图片的数据库，输入一张待识别图像，需要判定这幅图像属于数据库中哪一个人。对应方程(3-7)，即已知向量$\boldsymbol{y}_m$和矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，求解向量$\boldsymbol{x}_n$。

但实际情况中，由于数据库中照片很多，即n很大，而考虑到计算复杂度，人脸特征的维度又不会取的很高，即m较小，因此一般情况下，$m < n$，甚

① 本图取自文献[1]



(a)

图 3.3　最小化ℓ_2范数

至$m \ll n$。此时方程(3-7)是一个不定方程，即未知量的个数（远）多于方程的个数，方程无法求得一个唯一解。这种情况下，往往需要加入一定的限定条件，使方程求解问题变成一个优化问题。

最常用的限定条件为ℓ_2范数最下化，也即最小二乘法。其数学表达式为：

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{3-8}$$

但理论和实验都证明，最小二乘在稀疏表示问题上是不鲁棒的[1]。实际上，文献[1]进一步证明，以ℓ_0范数最小化作为限定所给出的是最优的，即应该把不定方程(3-7)的求解转换为如下一个优化问题：

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_0}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{3-9}$$

其中向量$\boldsymbol{x}$的ℓ_0范数表示向量中非零元素的个数。

但遗憾的是，最小化ℓ_0范数是一个组合优化问题，计算非常复杂。因此，常用ℓ_1范数来代替ℓ_0范数以减小计算量，即

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{3-10}$$

压缩采样理论可以证明，方程(3-10)给出的优化问题可以在一个以概率1的限度上逼近方程(3-9)，即两种优化出现误差的概率趋近于0。因此我们在实际中求解的是方程(3-10)的ℓ_1范数优化问题。

容易看出，优化问题(3-10)与第2章讨论的Lasso问题(2-2)是对偶问题[18]。因此可以通过求解Lasso问题来得到最小化ℓ_1范数优化问题的解。

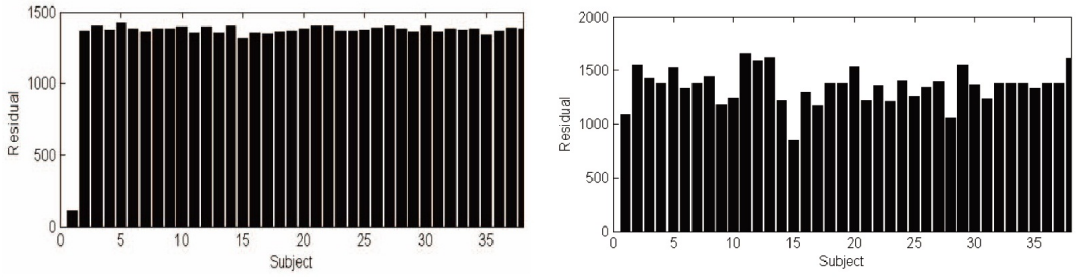


图 3.4　误差判定

实际上，图3.2的系数即为最小化ℓ_1范数得到的。为对比，我们在图3.3[①] 中给出最小化ℓ_2范数得到的稀疏。可见，图3.3给出的结果离实际的稀疏表示相差很远，误差很大，而图3.2几乎反应了稀疏表示系数的全貌。

3.3.2　由稀疏表示判定目标人

在求解优化问题3-10后，得到一个稀疏向量$\boldsymbol{x}$。在理想情况下，只有与待判定目标相同的人所对应的系数非零，不同的人在$\boldsymbol{x}$中的稀疏都为零，此时就可以容易地判定目标人。但实际中，由于误差的存在，很多非目标人所对应的图片也会给出相应的贡献，这时就不能用单纯的零与非零方法判定目标人，而需要给出一个更可靠的评判标准。

对于每一个数据库中的人i，我们定义算子$\delta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。对一个$n$为向量$\boldsymbol{x}$，令$\boldsymbol{y} = \delta_i(\boldsymbol{x})$满足：

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{if} \quad n_1 + \cdots + n_{i-1} < j \le n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{3-11}$$

也就是说，$\boldsymbol{x}$中属于第i个人的项保留，其余全置为零。

于是$\delta_i(\boldsymbol{x})$表示优化问题的解中第i的系数，而$\boldsymbol{A}\delta_i(\boldsymbol{x})$则表示由其重建的特征$\hat{\boldsymbol{y}}_i$。显然，$\hat{\boldsymbol{y}}_i$与$\hat{\boldsymbol{y}}$差距越小，$i$与待识别图像就越接近。我们用$\ell_2$范数描述二者的差距，则测试结果应为

$$\text{identity}(\boldsymbol{y}) = \arg\min_i \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_2} \tag{3-12}$$

① 本图取自文献[1]

Algorithm 3: SRC

Input: A matrix of training samples $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_k] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ for k classes and a test sample $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$

Output: The resulting class of $\boldsymbol{y}$, known as identity($\boldsymbol{y}$)

begin

  Normalize $\boldsymbol{A}$ so that each column is zero-mean and unit-ℓ_2-norm;

  Solve the ℓ_1-minimization problem (3-10) with Lasso $\rightarrow \boldsymbol{x}$;

  Compute the minimum residue with equation (3-12) $\rightarrow$ identity($\boldsymbol{y}$);

return *identity*($\boldsymbol{y}$)

图3.4[①] 给出了用本准则的判定结果，左图为ℓ_1范数优化的结果，可见待识别人与数据库中第一个人重建误差最小，且远小于其他人的重建误差，故应将其判定为第一个人，这个结果也符合实际情况。为对比，3.4的右图给出ℓ_2范数优化结果，所有数据库中人的重建误差都很大，没有某个人明显小于其他人，因此很难给出准确判定。此时即使用最小误差（第十五个人）作为结果，其判定也是错误的。这样进一步印证了ℓ_1范数在鲁棒性上明显优于ℓ_2范数。

3.3.3 识别算法伪代码

至此，我们给出了基于稀疏表示的人脸识别算法全过程，其伪代码见Algorithm SRC。这里SRC是英文Sparse Representation-based Classification的缩写，来自文献[1]。

3.4 基于稀疏表示的认证算法

在一些场景中，待识别的图像并不一定属于数据库中的某一个人，即我们事先不确定它是否在库中。这类情况下，在使用Algorithm SRC进行识别之前，我们需要增加一步判定。当判定目标人在库中时，才进行进一步识别，如果不在库中，应给出另外的相应操作（如报警或抛出异常等）。

对待识别目标是否在库中的判定有多种方法，最简单的只需用(3-12)式的重建误差，判断其是否超过某个特定的阈值。但文献[1]指出，目标人认证和识别最好使用不同的指标，以提高鲁棒性。

① 本图取自文献[1]

因此需要引入一个新判定指标，我们沿用文献[1]提出的稀疏性指数， SCI (Sparsity Concentration Index)。它的定义如下：

$$\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x}) = \frac{k \cdot \max_i \frac{\|\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_1}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}} - 1}{k-1} \in [0,1] \tag{3-13}$$

其中整数k为数据库中总人数，向量$\boldsymbol{x}$为优化问题(3-10)的解，而算子$\delta_i(\cdot)$的定义见(3-11)式。

由(3-13)式定义的稀疏性指数能够很好地描述向量$\boldsymbol{x}$的稀疏程度。当$\boldsymbol{x}$非常稀疏，即除了某个特定人对应的系数，其他系数都接近于零时， $\max_i \|\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_1}$将与$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}$非常接近，于是$\max_i (\|\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_1}/\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1})$接近于1， $\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x})$接近于1。另一方面，如果$\boldsymbol{x}$稠密，即稀疏性很差，则所有的$\|\delta_i(\boldsymbol{x})\|$都相近，约为$\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}$的$1/k$。于是$(\max_i \|\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_1}/\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1})$接近于$1/k$，而$\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x})$接近于0。

可见，$\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x})$越大，$\boldsymbol{x}$就越稀疏，相应的目标人就越有可能出现在库中。$\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x})$越小，$\boldsymbol{x}$就越稠密，目标人就越不可能出现在库中，而对应的$\boldsymbol{x}$也是非正常的平均结果。因此可以通过实验设定一个$\mathrm{SCI}(\boldsymbol{x})$阈值，当目标人高于阈值，则进行进一步识别；如果低于阈值，表面该人不在库中，进行相应的报警操作。

第 4 章　特征选取

本章介绍特征的选取策略。首先讨论选取特征的一般性要求，即要求特征有较好的区分性与简约性。进一步从最简单的下采样开始，讨论了广泛应用的特征脸(又称PCA方法)[12]，与此类似的有费希尔脸(Fisherface)[13]和拉普拉斯脸(Laplacianface)[14][15]。接着，我们将讨论文献[1]给出的更为简单的随机采样特征。接下来引入本文提出的约束采样特征和几何位置特征，最后，我们将简要讨论特征融合技术技术。

4.1　人脸特征概述

人脸图像一般用一个二维数组表示，但在实际操作中一维数组往往更为方便（如计算范数、欧式距离等），因此大部分模式识别算法希望所识别的模式是一个一维特征。很多人脸识别算法都基于模式识别，因此也希望把一张人脸图用一个一维数组来表示。将二维人脸图用一个一维数组表示的过程称为特征选取，所得到的一维数组称为人脸的一个特征。

总的来说，一个人脸特征应该满足如下两条特性：

区分性 从识别性能的角度，人脸特征应该有较好的区分性。不同的人的两张人脸照片的特征不能相同，而且相差越远越好，这里的差距往往用欧式距离或马氏距离等来衡量。另一方面同一个人的不同人脸照片（不同光照、不同姿态甚至不同表情），希望他们的特征比较相近，从而可以减少误判和虚警。

简约性 从计算复杂度的角度，人脸特征应该有较好的简约性（简约性的概念在3.1节中讨论过）。对于一个紧致编码的人脸特征，表现为特征维数越小，简约性越强，计算就越简单。但是维数过小将会破坏特征的区分性，因此在选取特征时应该综合考虑。

对人脸特征的选取方法有很多，下面将介绍具体的特征提取方法，并分析他们的区分性与简约性条件。

4.2 下采样特征

下采样特征是最简单的人脸特征。它的基本思想是，将一个二维图像的所有像素从上到下，从左到右进行排列，即可将二维特征变成一维特征。

具体来说，对于一幅$M \times N$的图像$I(x,y), 1 \le x \le M, 1 \le y \le N$，得到的一维向量$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$，其中$m = M \times N$，且满足

$$\boldsymbol{x}(N * x + y) = I(x,y), \quad 1 \le x \le M, 1 \le y \le N \tag{4-1}$$

但这样选取的特征区分性和简约性都很差。原因在于，一幅人脸图像往往很大（如360×480），图中像素很多（$360 \times 480 = 172800$），用如此长的一维向量作为人脸特征，其简约性一定不能令人满意。另一方面，在图像采集的过程中，每个像素都容易受到噪声和背景的影响，因此把每个像素都放在特征向量中，噪声和背景对他的影响很大，特征的区分性也会较差。为了解决这个问题，我们往往采用下采样的方法以减小向量长度和噪声的影响。

设原始图像为$I(x,y)$，尺寸为$M \times N$，即$1 \le x \le M, 1 \le y \le N$。将图像下采样$k$倍，得到一个$m \times n$的新图像$I_d(x,y)$，其中

$$m = \left\lfloor \frac{M}{k} \right\rfloor, \quad n = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \tag{4-2}$$

下采样的方法有两种，第一种为在每相邻k个像素点取一个采样点，作为新图像对应像素的值，即

$$I_d(x,y) = I(kx, ky), \quad 1 \le x \le n, 1 \le y \le n \tag{4-3}$$

另一种方法为取对应$k \times k$块内的像素进行平均，得到新图像的对应像素值，即

$$I_d(x,y) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} I(kx + i, ky + j), \quad 1 \le x \le n, 1 \le y \le n \tag{4-4}$$

可见，两种方法都能将特征向量的长度减小k^2倍，从而增强特征的简约性。但第一种方法直接取图中像素，仍然容易受到随机噪声的影响，事实上，由于取的像素减少，其受到随机噪声的影响更大。而第二种方法将对应块内的像素平均，可以极大地消除随机噪声。可以证明，如果原始图像每个像素的噪声方差为σ^2，则通过方程(4-4)得到新图像每个像素的随机噪声为σ^2/k，即将随机噪声的影响减小了k倍。

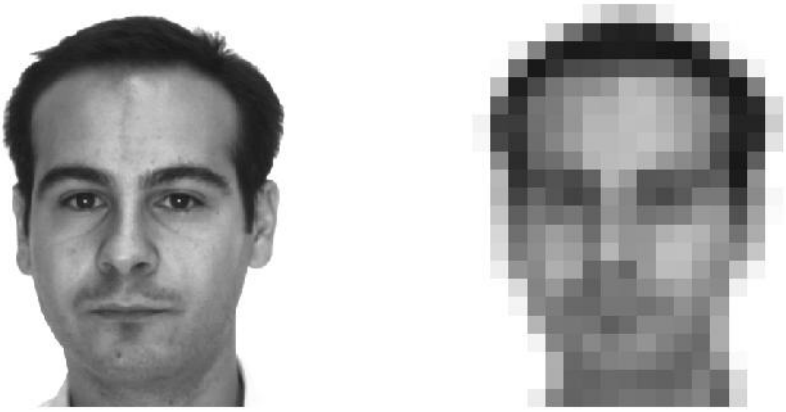


图 4.1　下采样特征

图4.1给出了用(4-4)式下采样的一个例子。左图为360×480的原始人脸图像，右图为18×24的下采样结果，$k = 480/24 = 20$，压缩比$k^2 = 400$。可见右图仍然能够保留一定的人脸轮廓，但清晰度受到了很大的限制。

可见，下采样方法思路清楚，计算简单，但结果的区分性不佳，处理后将损失较多的人脸细节信息。但我们在实验部分（第5章）将指出，基于Lasso的人脸识别算法能够有效的提取下采样所剩余的信息，较好地完成识别任务。

4.3　PCA特征

PCA特征（又称特征脸(eigenface)）是在当今人脸识别中最著名且广泛应用的特征，它于1991年由学者Turk和Pentland提出[12]。该特征通过主成分分析(PCA)的方法，找到人脸模型中最关键（协方差最大）的信息，从而达到对人脸图像的最简约表示。

设有n幅人脸图像，将每幅图像的像素由上到下、由左到右排列成一个m维列向量（见方程(4-1)），于是得到n个人脸向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^m$。

对每个$\boldsymbol{x}_j$归一化，使其均值为零，ℓ_2范数为一，即

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \boldsymbol{x}'_j = \boldsymbol{x}_j - \bar{x}_j \tag{4-5}$$

$$\chi_j = \|\boldsymbol{x}'_j\|_{\ell_2} \qquad \boldsymbol{x}''_j = \frac{\boldsymbol{x}'_j}{\chi_j} \tag{4-6}$$

为方便表示，省去归一化后的″，即用$\boldsymbol{x}_j$表示$\boldsymbol{x}_j''$。

将归一化后的列向量级联得到人脸矩阵

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{4-7}$$

计算矩阵$\boldsymbol{X}$的协方差阵$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}$：

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T \in \mathbb{R}^{m \times m} \tag{4-8}$$

接着将协方差阵$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}}$进行特征值分解

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T \tag{4-9}$$

这也相当于对矩阵X进行SVD分解

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T \tag{4-10}$$

其中$\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$都是正交矩阵，$\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$是对角矩阵，对角元降序排列，即$S_{11} \geq S_{22} \geq \cdots \geq S_{mm}, \Sigma_{11} \geq \Sigma_{22} \geq \cdots$，且满足

$$S_{ii} = \Sigma_{ii}^2, \quad 1 \leq i \leq \min\{m, n\} \tag{4-11}$$

这里$\boldsymbol{U}$的每列是一个m维向量，它们构成$\boldsymbol{X}$的一组正交基。这些向量被称为特征脸，所有其它在$\boldsymbol{X}$张成的空间里的向量都可以由这些特征脸表示，且这种表示是正交的。

现在取$\boldsymbol{U}^T$的前l行（即$\boldsymbol{U}$的前l列），记作$\boldsymbol{U}_l^T \in \mathbb{R}^{l \times m}$。这样得到的$\boldsymbol{U}_l^T$即为变换矩阵，将其与$\boldsymbol{X}$相乘，记得到特征向量

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}_l^T \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{l \times n} \tag{4-12}$$

变换后，每一幅人脸图像$\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{R}^m$被缩减成一个$\boldsymbol{l}$维特征向量$\boldsymbol{y}_j \in \mathbb{R}^l$，且一般$l$比$m$小得多。（一幅$480 \times 360$的图像，$m = 360 \times 480 = 172800$，而$l$一般取几百甚至几十，压缩比可以达到上千倍。）

如此变换出的特征向量$\boldsymbol{y}$是紧致的，因为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T = \boldsymbol{U}_l^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{U}_l = \boldsymbol{\Sigma}_l \tag{4-13}$$

图 4.2　PCA特征

其中$\mathbf{\Sigma}_l$是$l \times l$的对角矩阵，对角元为$\mathbf{\Sigma}$的前l个元素（也即最大的l个元素）。协方差矩阵对角化，表明特征向量$\boldsymbol{y}_j$是正交的，即所有特征去耦，对角元最大化，表明特征特征向量的表现力是最强的。

图4.2给出了特征脸的一个示例。左图为原始480×360图像，右图为取$l = 30$得到的特征脸（全库90个人，即$n = 90$）。由于维数下降，特征脸将显得模糊，也会加入其它人脸的信息（如眼镜），但总的来说，在压缩比$m/l = 480 \times 360/30 = 5760$的情况下，输出的特征仍能够很好地重建原始图像，可见PCA方法的强大。

最后我们指出，虽然PCA方法得到的特征区分性与简约性都非常好，但算法复杂提高，计算量大，且变换矩阵随图像不同而变化，这些缺陷限制了它的很多应用。

4.4　随机采样特征

为克服前一小节讨论的PCA特征计算复杂、变换矩阵依赖图像等问题，我们在这里引入随机采样特征[1]。它也是对原始图像进行线性变换，但变换矩阵可以事先确定，也不需要复杂的特征值分解计算，算法的区分性和紧致性则略差于PCA，但仍然可以达到一个较高的水平。

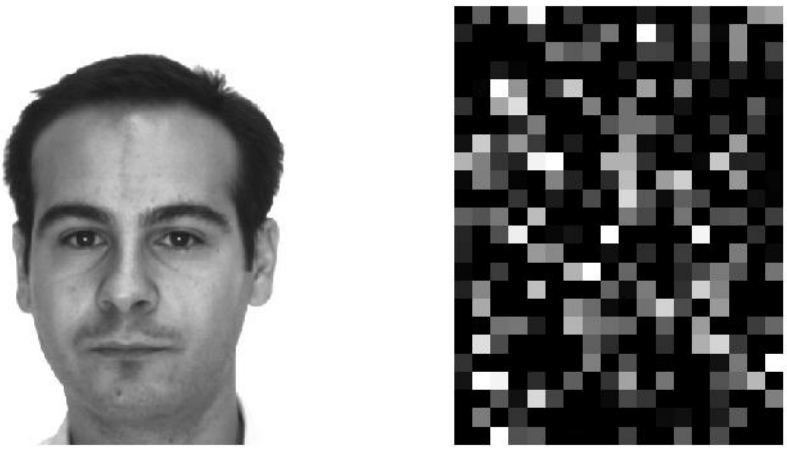


图 4.3　随机采样特征

对于一幅$M \times N$的图像$I(x, y), 1 \le x \le M, 1 \le y \le N$，将所有像素从左到右，从上到下排列成一个$m = M \times N$的列向量$\boldsymbol{x}$（见方程(4-1)）。我们取一个$d \times m$维的随机矩阵$\boldsymbol{R}$，其中每一个元素$r_{ij} \sim N(0, 1)$，即服从标准正态分布，且所有矩阵元素之间统计独立。对应特征脸的概念，矩阵$\boldsymbol{R}$的每一行构成的向量称为“随机脸”(Randomface)[1]。每幅图像可以由这些随机脸线性组合。

现在用$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{x}$相乘：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \tag{4-14}$$

如此得到一个d维特征向量，它是人脸图像$\boldsymbol{x}$在特征脸$\boldsymbol{r}_j$空间上的投影。

图4.3给出了随机采样的一个例子。左图为360×480的原始人脸图像，右图为432维随机脸的投影结果（用一个24×18的图表示），压缩比$360 \times 480/432 = 400$。虽然随机采样的结果没有确切的视觉意义，但它综合了人脸图像所有像素点的信息，所含的信息量仍然很大。

特征向量$\boldsymbol{y}$有图像向量$\boldsymbol{x}$内所有元素的贡献，因此其区分性是比较高的。且一般而言，特征向量的维数d比图像像素的个数m小得多，即$d \ll m$，因此向量的简约性也较好。但随机脸的缺陷在于变换矩阵的选取是随机的，在一般情况下，随机结果不会很差，但不能排除随机向量选取不好时，矩阵$\boldsymbol{R}$将会退化，导致识别率大大下降。

4.5 约束采样特征

在下采样特征和随机采样特征中，所有像素点对特征的贡献是相同的（或者在统计意义上是相同的）。这类方法会把背景等面部不重要的信息记入特征，影响特征向量的简约性与区分性。为了克服这一问题，我们引入约束采样的概念。他的主体思想是将采样的范围约束在人脸的重要区域，从而增加每个采样点的信息含量，也可以减少不必要的背景采样点。

对人类视觉的研究表明，在人脸识别过程中，五官特征对辨识人脸起着非常重要的作用[8]。对于一幅清晰的正面图像，一般通过人的眼睛、鼻子和嘴三个重要器官来进行人脸的辨识。因此，我们也将对这些重要部位进行约束采样。

进行约束采样的前提与关键是能够检测到重要部位。目前关键部位的检测中，对人眼检测的研究最广泛也最成熟[19][20]。但如果想要得到鼻子和嘴等其他重要部件，只检测眼睛是不够的。在这里，我们采用基于机器学习方法的ASM(Active Shape Models)[21] 和AAM(Active Appearance Models)[22]技术来提取人脸关键点。我们提取的关键点有瞳仁（眼球），鼻翼和嘴角。

下面我们给出具体的采样方法。设关键点提取后得到的左眼坐标(EL_x, EL_y)，右眼坐标(ER_x, ER_y)，左右鼻翼坐标$(NL_x, NL_y), (NR_x, NR_y)$，左右嘴角坐标$(ML_x, ML_y), (MR_x, MR_y)$。

一般情况下，采集到的人脸图像不一定会严格对齐，在这里可以根据关键点的坐标进行归一化。我们取两只眼睛的坐标作为基准，要求人脸图像的两只眼睛平齐，即$EL_y = EL_y$。为此可能需要将图像旋转一个角度α，其中α由下式给出：

$$\alpha = \arctan \frac{ER_y - EL_y}{ER_x - EL_x} \tag{4-15}$$

图像旋转后将形成新的点坐标$(EL'_x, EL'_y), (ER'_x, ER'_y), (NL'_x, NL'_y), (NR'_x, NR'_y), (ML'_x, ML'_y), (MR'_x, MR'_y)$，为方便，我们仍然用不带撇(′)的变量表示。

旋转后，两只眼睛的y坐标将相等，但并不能保证两个鼻翼和嘴角的y坐标也相同，可能会产生一到两个像素的误差，我们定义鼻翼、嘴的平均y坐标：

$$N_y = \frac{NL_y + NR_y}{2} \tag{4-16}$$

$$M_y = \frac{ML_y + MR_y}{2} \tag{4-17}$$

图 4.4　约束采样特征

接着我们定义眼睛、鼻子和嘴的标准距离

$$d_e = |EL_x - ER_x| \tag{4-18}$$

$$d_n = |NL_x - NR_x| \tag{4-19}$$

$$d_m = |ML_x - MR_x| \tag{4-20}$$

进一步，可以给出三个部件的采样范围。我们用一个矩形采样，并给出它的最左、最右，最上和最下四条直线的坐标。结果见表4.1。

表 4.1　关键部件的矩形限定直线坐标

	最左x_l	最右x_r	最下y_d	最上y_u
左眼	$EL_x - 0.3d_e$	$EL_x + 0.3d_e$	$EL_y - 0.4d_e$	$ER_y + 0.2d_e$
右眼	$ER_x - 0.3d_e$	$ER_x + 0.3d_e$	$ER_y - 0.4d_e$	$ER_y + 0.2d_e$
鼻子	NL_x	NR_x	$N_y - 0.5d_n$	$N_y + 0.25d_n$
嘴	$ML_x - 0.1d_m$	$MR_x + 0.1d_m$	$M_y - 0.3d_m$	$M_y + 0.3d_m$

图4.4为约束采样特征示意图。左图为原始图像，右图中黑色区域为约束采样范围。给定范围后，可通过下采样或随机采样的方法得到人脸特征向量。

在后面的实验部分（第5章）将看到，约束采样方法明显优于传统的下采样和随机采样，其识别率也有大幅提高。

4.6 几何位置特征

前面各节讨论的特征都以图像各像素的灰度值为基础，通过对其采样或线性变换得到相应的特征向量，我们将这一类特征称为灰度特征或纹理特征。与纹理特征对应，另一类特征以人脸图像关键点位置为标准，提取出的特征称为几何特征。

对人类视觉研究表明，除了面部纹理外，人脸的脸型、五官位置也对识别起着至关重要的作用[8]。因此，我们通过ASM[21]和AAM[22]方法，提取人脸关键器官位置和脸型作为特征向量，用于人脸识别。

对人脸提取特征点后，同样需要归一化与校正，包括角度校正与尺度校正，都以人眼为基准。校正结果使两只眼睛平齐，间距恒定。

角度校正将人脸图像旋转一个角度α，α的计算见方程(4-15)。设某特征点的坐标(x, y)，校正后坐标

$$\begin{cases} \hat{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \hat{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{4-21}$$

尺度校正将人脸拉伸一个常量s（$s < 1$时为压缩），使得压缩后两只眼睛间距为d，则

$$s = \frac{d}{|EL_x - ER_x|} \tag{4-22}$$

将特征点坐标(x, y)与s相乘即得校正结果

$$\begin{cases} \tilde{x} = s\hat{x} \\ \tilde{y} = s\hat{y} \end{cases} \tag{4-23}$$

最后，将得到的所有特征点坐标排列成一个列向量，即可作为人脸特征。

图4.5为选取的105个特征点示意图，将所有105个点的x, y坐标级联，将得到一个210维特征向量。

几何特征从另一个侧面反应了人脸的形态，在很多问题中能够与纹理特征互补。不过由于人脸中特征点个数有限，特征的维度一般不会做到很大，会从一定程度上影响它的区分性。因此常常与纹理特征配合使用，即我们在下一节讨论的特征融合问题。

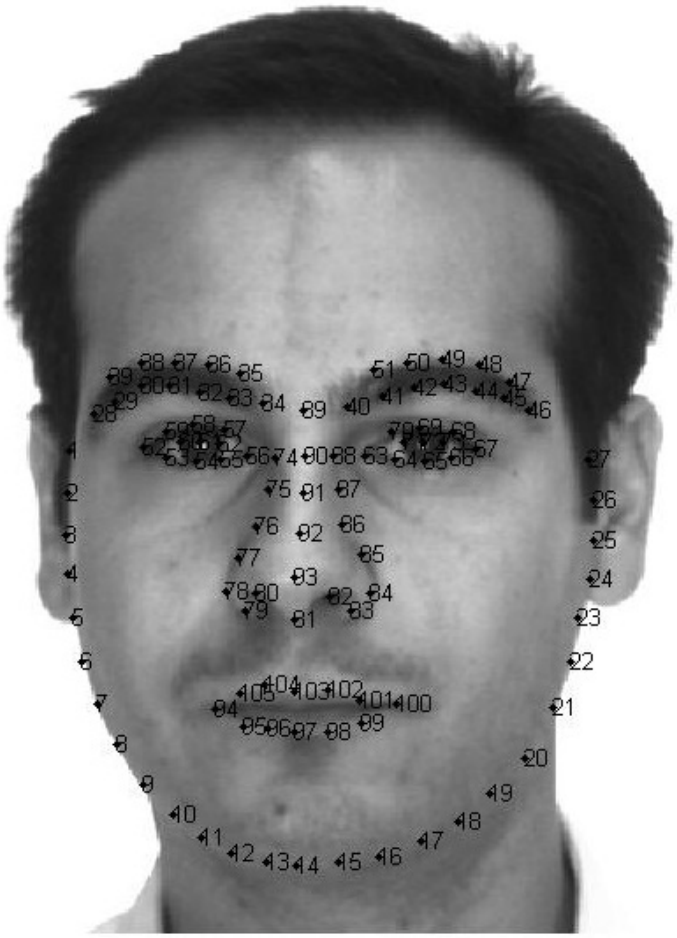


图 4.5　几何位置特征

4.7　特征融合

前文提到，纹理特征和几何特征在人脸辨识中都有非常重要的意义，单一特征往往会损失一定的信息量。因此将两种特征进行融合才能够达到对人脸更全面的描述和更准确的识别。

特征融合的一个自然的想法就是将两个特征向量级联，得到一个更长的特征向量。这种方法操作简单，在一定程度上能够改善识别效率，但也存在着很多问题。首先，每个特征的尺度是不同的，如纹理特征的每个元素是灰度值，在0到255之间浮动，变化往往会很大，而几何特征表示特征点位置，一般变化只有十几或几十个像素。两者很有可能不相匹配，使得一个特征被另一个特征

的值“覆盖”。另一方面，当特征被拉的很长时，往往会破坏特征的稀疏性，使得稀疏采样的条件被破坏，反而让识别率有所降低。因此级联的方法往往不是最佳的融合策略。

在此，我们提出一个更加有效的融合方法。首先对输入的人脸图像分别提取纹理特征和几何特征，并用Algorithm SRC识别，并仿照方程(3-12)，定义残差

$$R_{j,i} = \|\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{A}_j\delta_i(\boldsymbol{x}_j)\|_{\ell_2}, \qquad j = 1 \text{ or } 2 \tag{4-24}$$

其中$j = 1$为纹理特征，$j = 2$为几何特征，残差$R_{j,i}$越小表示该图像是第i个人的可能性越大。

接着对残差归一化：

$$r_{j,i} = \frac{R_{j,i}}{\sum_{l=1}^{k} R_{j,l}} \tag{4-25}$$

并将归一化残差进行融合

$$s_i = b_1 R_{1,i} + b_2 R_{2,i} \tag{4-26}$$

其中b_1, b_2为归一化系数，满足$b_1 + b_2 = 1$。

融合后s_i表示输入人脸与数据库中第i个人的相似程度，s_i越小，相似程度越大。最后识别结果为

$$\text{identity} = \arg\min_i s_i \tag{4-27}$$

第 5 章　实验结果

在本章中，我们对前文提出的基于Lasso的人脸识别算法进行了测试。我们首先介绍了目前国际通行的人脸数据库的组成和结构。接着对算法在传统特征下进行了测试，证明了即使表现力一般的下采样和随机采样特征，本算法都有很好的识别效果。进一步我们对约束采样特征进行了测试，验证了该特征的表现力与简约性。最后我们引入几何特征并进行了特征融合，融合后算法的识别率有大幅提高。融入几何特征的约束采样在各数据库中达到99%以上的识别率，可见算法性能出众。此外我们还将算法集成在人脸识别系统中并进行了展示，获得很好的效果。

5.1　通行人脸数据库

5.1.1　YaleB人脸数据库(Extended)

YaleB人脸数据库[9]包含10个不同人物的人脸图片（如图5.1），每人有9种不同姿态，64种不同光照，共576幅图片，扩展(extended)数据库中又加入了28个人物（如图5.2)，整个数据库共21888幅不同光照与不同姿态的人脸图像。每幅照片均为无损“pgm”格式，灰度图片，尺寸为192×168。

在本文的实验中，我们只考虑正面光照的64幅图像。 YaleB数据库的光照变化一般比较剧烈，向光一面常常出现曝光出现曝光过度（所有像素灰度值均为255），而背光一面又会出现曝光不足，动态范围过小等问题，因此解决其不同光照下的人脸识别是一个相对具有挑战性的任务。我们实验中一般随机取某人一半（约32张）的图像进行训练，另一半图像用于测试。

图 5.1　YaleB数据库人物正面图像

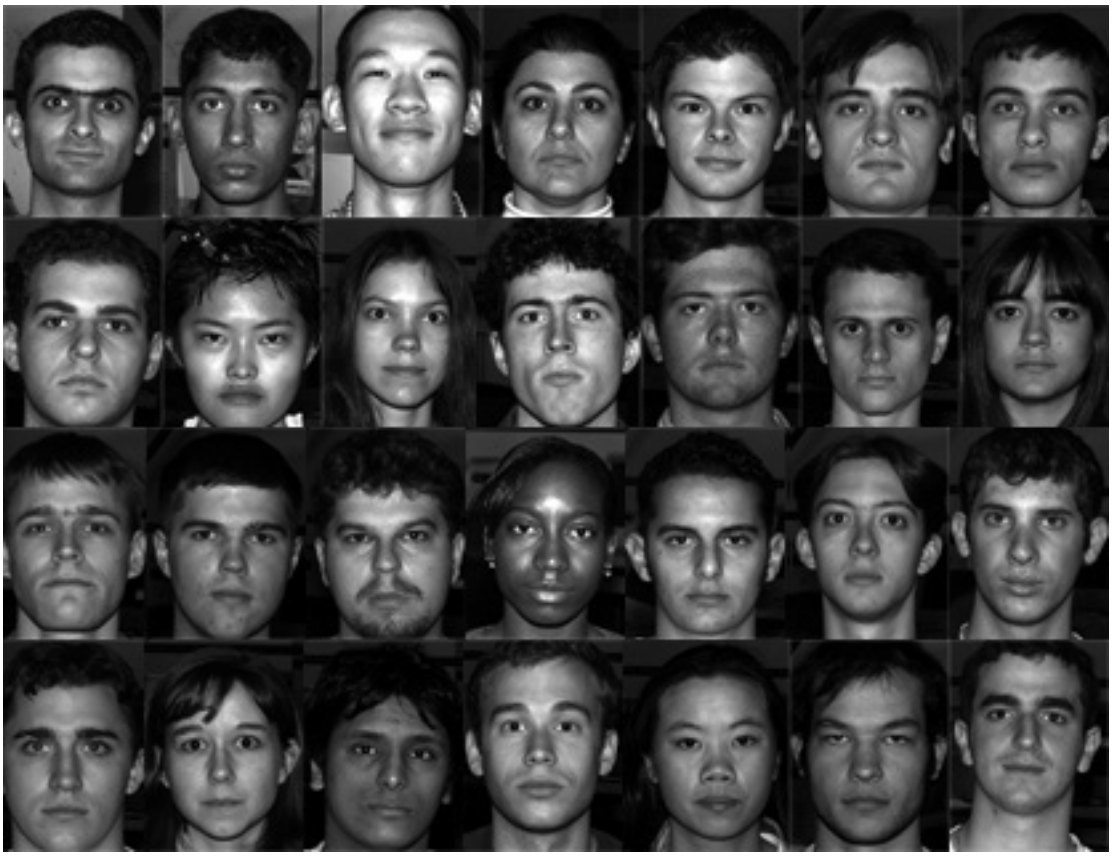


图 5.2　扩展YaleB数据库人物正面图像

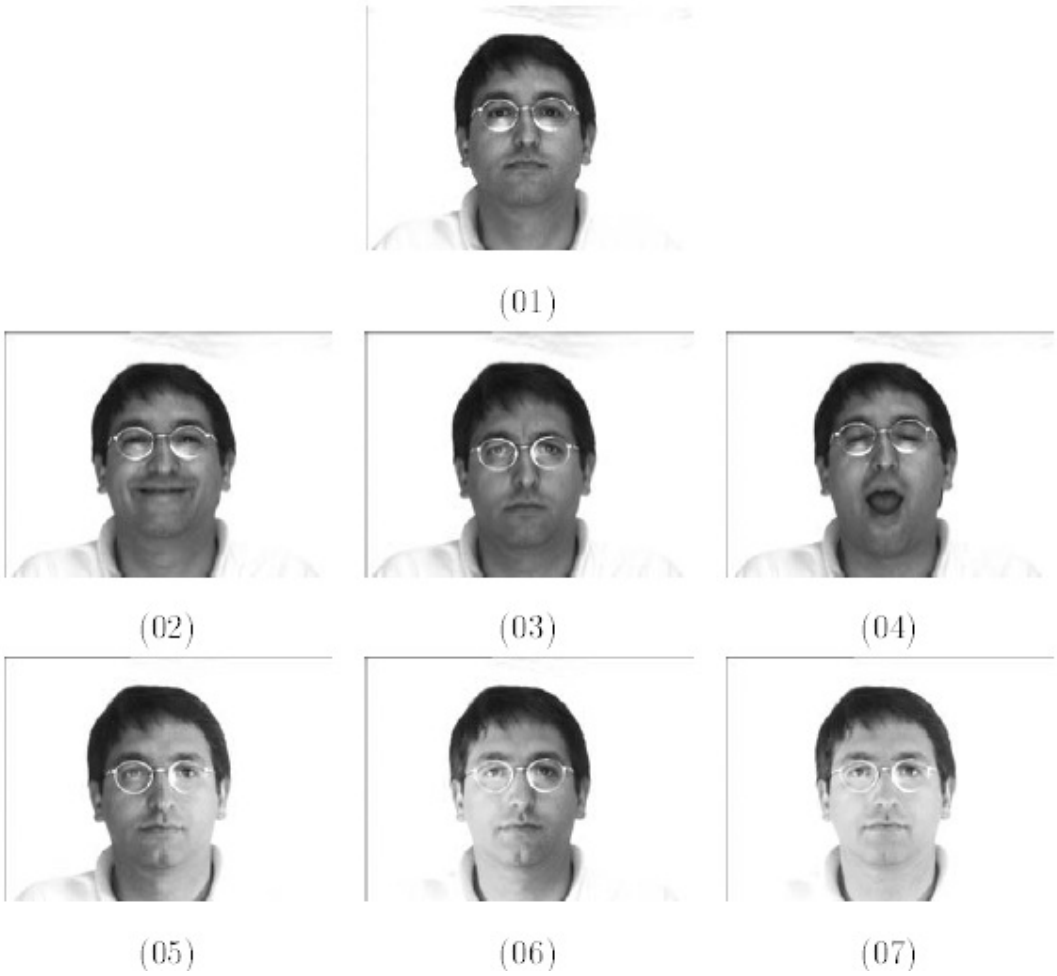


图 5.3　AR数据库人物的表情与光照图

5.1.2　AR人脸数据库

AR人脸数据库[23]包含126个不同人物（70位男性，56位女性）的人脸图片。每人有两组图片，拍摄间隔约一至两周。每组有表情图片4张（中性、微笑、愤怒和尖叫），光照图像三张（左侧光、右侧光和双测光），如图5.3。全库共1764幅图片，分辨率768×576，彩色图像。

本文中，我们同时考虑光照与表情变化。在实验时用第一组图片作为训练集，第二组图片用于测试。虽然AR库图像的光照变化相对柔和，但表情的不同给识别增加了不少难度。

表 5.1　传统特征在YaleB库的识别率

特征维数	下采样特征	随机采样特征
30	76.4%	80.4%
60	88.9%	85.1%
120	94.5%	93.0%
480	95.3%	95.5%

表 5.2　传统特征在AR库的识别率

特征维数	下采样特征	随机采样特征
44	68.2%	71.0%
88	88.3%	89.6%
192	94.8%	95.2%
432	95.4%	95.8%

5.1.3　CAS-PEAL人脸数据库

CAS-PEAL人脸数据库[24]由中国科学院计算技术研究所构建，包含了1040名中国人共99450幅头肩部图像，涵盖了姿态、表情、饰物和光照4种主要变化条件，部分人脸图像具有背景、距离和时间跨度的变化。本文中我们主要考虑光照变化的图像。

5.2　传统特征下算法的识别率

基于Lasso的人脸识别算法能够在表现力相对较弱的特征下给出很好的识别结果。表5.1和表5.2分别为下采样特征和随机采样特征在YaleB数据库与AR数据库里的识别率。

从结果容易看出，即使在表现力相对较弱的下采样特征和约束采样特征中，本文的人脸识别算法也能给出较好的结果。进一步分析可知，识别率一般只与特征的维数相关，特征维数越大，向量的表现力越强，识别率也就越高。但识别率随特征维数的增长显然是有限度的。一般而言，当特征维数增长到一定程度时，虽然特征的区分性增强，但他的简约性下降，这将破坏Lasso问题的稀疏性条件，因此识别率将不再增加甚至会有所下降。

表 5.3　约束采样特征在AR库和CAS-PEAL库的识别率

特征维数	AR数据库	CAS-PEAL数据库
192	98.10%	97.52%
432	98.10%	98.51%
768	97.46%	98.27%
1200	96.98%	98.02%

5.3　约束采样下算法的识别率

接着，我们对约束采样得到的特征进行了测试。由于约束采样需要事先给出眼睛、鼻翼和嘴角等特征点，我们采用了人工标定的方法。在AR数据库上的实验结果见表5.3 ①。

从实验结果中可见，约束采样特征的识别效果明显优于传统的下采样和随机采样特征。另一方面，约束采样的特征向量的维数并不是越多越好，从表5.3中可以看到，识别率在特征维数432处达到饱和，再继续增加特征维数，识别率反而下降。这也进一步印证了约束采样特征的表现力和紧致性都很好，并不需要很高的特征即可获得很好的识别率，而特征维数增多反而会破坏稀疏性条件，使识别率有所降低。

5.4　融入几何特征后的识别效果

前文曾经提到，在人脸辨识过程中，除纹理特征外，几何特征也起着非常重要的作用。在实验中，我们加入了 ASM-AAM 提取的105点特征，与前面的纹理特征进行融合，取得了很高的识别率。但基于 ASM-AAM 提取的几何特征不能保证绝对准确，有时会有一定的误差。由于本文以探讨人脸识别为目的，因此在实验中还对提取的特征点进行了手工校正，并与校正前进行了对比，以体现算法在特征融合后的优势。实验结果见表5.4和表5.5 ②。

从实验结果中可以看到，加入几何信息后，算法的识别率有很大提高，这也验证了几何信息在人脸识别中的重要作用。但我们也指出，算法的准确度依赖于几何特征提取的准确度。目前所提取的几何信息为人脸特征点，其算法尚不够完备。因此手工取点后准确度又有进一步提高。因为本文以人脸识别算法

① 本部分实验由王晶完成
② 本部分实验由王晶完成

表 5.4　融入几何特征后在AR库中的识别率

特征维数	自动取点		手工取点	
	下采样	随机采样	下采样	随机采样
30	84.60%	72.07%	97.78%	96.83%
54	91.27%	85.08%	98.89%	97.46%
130	93.33%	91.11%	99.37%	99.37%
540	94.29%	95.08%	99.52%	99.68%
1230	93.81%	94.60%	99.21%	99.52%

表 5.5　融入几何特征后在CAS-PEAL库中的识别率

特征维数	自动取点		手工取点	
	下采样	随机采样	下采样	随机采样
30	86.63%	67.57%	92.57%	90.59%
54	94.06%	81.68%	96.29%	94.31%
130	96.04%	88.12%	96.78%	96.29%
540	94.06%	89.60%	97.52%	96.78%
1230	93.32%	90.84%	96.53%	97.03%

表 5.6　融入几何特征的约束采样在AR库和CAS-PEAL库的识别率

特征维数	自动取点		手工取点	
	AR库	CAS-PEAL库	AR库	CAS-PEAL库
30	98.57%	98.27%	99.52%	98.76%
54	98.73%	98.51%	99.37%	99.01%
130	98.10%	99.01%	99.52%	99.01%
540	97.46%	98.27%	99.52%	98.76%

为主，暂不考虑关键点确定方面的问题。从实验结果看，如果几何特征提取准确，算法的识别率会很高。

表5.4和表5.5都是在传统特征下加入的几何特征，如果使用约束采样的结果并加入几何特征，效果将更加明显。在AR库和CAS-PEAL库的识别结果如表5.6[①]。

从实验结果上看，加入几何特征的约束采样的识别率接近100%，即错误率非常小。因此，我们宣称，本文提出的基于Lasso的人脸识别算法有着非常优秀的识别结果。

① 本部分实验由王晶完成

此外，我们还将算法集成在实际的人脸识别系统中，并参加了2010第八届北京国际社会公共安全产品与技术设备展览会，展出期间性能优秀，受到诸多参观者的好评。

第 6 章　总结

本文首先介绍了人脸识别技术的背景与发展，讨论了它在法律、安防以及商业等各个领域的诱人应用前景，以及近些年来模式识别、图像信息处理和计算机视觉等技术的发展对识别算法的影响与贡献。文章给出了人脸识别的一般性定义，并探讨了特征脸、费希尔脸、拉普拉斯脸以及稀疏表示等几种典型算法。

接着，我们详细讨论了Lasso问题的定义和算法。从两种前向回归算法出发，给出了解决此问题的一般思路，进而给出了高效的LARS算法。将LARS算法进一步推广，从系数上加入一定限制，即可容易地解决Lasso问题。文章还讨论了Lasso问题与信号处理中压缩采样的联系，并通过实验验证了算法正确性与精确度。

介绍了基本理论问题后，我们讨论了人脸识别中简约性的作用。文章指出，简约性不一定要求信号被最紧致地表示，在很多情况下，信号的稀疏表示也能够很好地符合简约性条件，且有时更容易恢复信息。进而我们提出了人脸的稀疏表示方法，并以此为基础，提出了基于ℓ_1范数最小化的复原技术。这实际上与Lasso问题是等价的。通过复原的稀疏表示，我们给出如何确定图像的归属，即给出识别结果。此外，我们还给出了一种基于Lasso的人脸认证算法。

进一步，我们讨论了用于稀疏表示的人脸特征。我们介绍了特征向量需要满足的两个性质，即区分性和简约性，从最简单的下采样特征出发，讨论了人脸识别中的经典的PCA特征，以及基于随机采样的随机脸特征。文章分析了这些特征的表现力与计算复杂度，并借此提出了更加具有区分度的约束采样特征。接着，我们指出除纹理特征外，几何特征在人脸识别中也具有非常重要的意义，进而引入基于 AAM-ASM 的105点几何特征。最后，我们给出了有效的特征融合算法。

我们对所提出的算法在YaleB数据库、AR数据库和CAS-PEAL数据库上做了测试，分别验证了稀疏表示算法的效率，约束采样特征的表现能力以及特征融合方法的正确性。理论分析和实验结果都表明，基于Lasso的人脸识别算法有很高的识别效率和较强的识别鲁棒性。

插图索引

图 2.1 三种回归算法的几何直观 9
图 2.2 压缩采样恢复测试 17
图 3.1 人脸光照锥 22
图 3.2 全局稀疏表示，最小化ℓ_1范数 24
图 3.3 最小化ℓ_2范数 25
图 3.4 误差判定 26
图 4.1 下采样特征 31
图 4.2 PCA特征 33
图 4.3 随机采样特征 34
图 4.4 约束采样特征 36
图 4.5 几何位置特征 38
图 5.1 YaleB数据库人物正面图像 42
图 5.2 扩展YaleB数据库人物正面图像 42
图 5.3 AR数据库人物的表情与光照图 43

表格索引

表 4.1　关键部件的矩形限定直线坐标 36
表 5.1　传统特征在YaleB库的识别率 44
表 5.2　传统特征在AR库的识别率 44
表 5.3　约束采样特征在AR库和CAS-PEAL库的识别率..... 45
表 5.4　融入几何特征后在AR库中的识别率 46
表 5.5　融入几何特征后在CAS-PEAL库中的识别率 46
表 5.6　融入几何特征的约束采样在AR库和CAS-PEAL库的识别率..... 46

参考文献

[1] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust Face Recognition via Sparse Representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2):210–227

[2] Wright J, Ganesh A, Zhou Z H, et al. Demo: Robust Face Recognition via Sparse Representation. 2008 8th Ieee International Conference on Automatic Face & Gesture Recognition, 2008. 942–943

[3] Wagner A, Wright J, Ganesh A, et al. Towards a Practical Face Recognition System: Robust Registration and Illumination by Sparse Representation. Computer Vision and Pattern Recognition, 2009. 597–604

[4] Candes E J. Compressive sampling. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006, 3:1433–1452

[5] Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. Ieee Signal Processing Magazine, 2008, 25(2):21–30

[6] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the Lasso. Journal of the Royal Statistical Society Series B-Methodological, 1996, 58(1):267–288

[7] Efron B, Hastie T, Johnstone I, et al. Least angle regression. Annals of Statistics, 2004, 32(2):494–499

[8] Zhao W, Chellappa R, Rosenfeld A, et al. Face Recognition: A Literature Survey. ACM Computing Surveys, 2003. 399–458

[9] Belhumeur P, Kriegman D. What is the Set of Images of an Object Under All Possible Lighting Conditions? International Journal of Computer Vision, 1998, 28(3):245–260

[10] Ho J, Yang M H, Lim J, et al. Clustering appearances of objects under varying illumination conditions. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2003, 1:11–18

[11] Murase H, Nayar S K. Visual learning and recognition of 3D objects from appearance. International Journal of Computer Vision, 1995, 14(1):5–24

[12] Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition. Journal of Cognitive Neuroscience, 1991, 3(1):71–86

[13] Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition Using Class Specific Linear Projection. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7):711–720

[14] He X, Niyogi P. Locality Preserving Projections. Advances in Neural Information Processing Systems 16, 2003.

[15] He X, Yan S, Hu Y, et al. Face Recognition Using Laplacianfaces. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3):328–340

[16] Candes E J, Romberg J K, Tao T. Decoding by linear programming. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12):4203–4215

[17] Candes E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2005, 59(8):1207–1223

[18] Osborne M R, Presnell B, Turlach B A. On the LASSO and its dual. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2000, 9(2):319–337

[19] Wang P, Green M B, Ji Q, et al. Automatic Eye Detection and Its Validation. CVPR '05: Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05) - Workshops, 2005. 164

[20] Al-Mamun H A, Jahangir N, Islam M S, et al. Eye Detection in Facial Image by Genetic Algorithm Driven Deformable Template Matching. International Journal of Computer Science and Network Security, 2009, 9(8):287–294

[21] Cootes T F, Taylor C J, Cooper D H, et al. Active Shape Models-Their Training and Application. Computer Vision and Image Understanding, 1995, 61(1):38–59

[22] Cootes T F, Edwards G J, Taylor C J. Active Appearance Models. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intelligence, 2001, 23(6):681–685

[23] Martinez A, Benavente R. The AR Face Database. CVC Technical Report 24, 1998.

[24] 张晓华, 山世光, 曹波, et al. CAS-PEAL大规模中国人脸图像数据库及其基本评测介绍. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(1):9–17

致　谢

衷心感谢导师苏光大教授和陈健生老师对我毕业设计的精心指导。从最初的定题、资料收集，到算法分析、实验设计，再到写作、修改、论文定稿，他们给了我耐心的指导和无私的帮助。为了指导我们的毕业论文，他们放弃了自己的休息时间，他们的这种无私奉献的敬业精神令人钦佩，在此我向他们表示我诚挚的感谢，他们的言传身教将使我终生受益。

在毕业设计过程中，王晶学姐与我参加同一课题的研究，在与她的合作与讨论中，深深被她敏捷的思路和踏实的态度所感动，我收获很多。本文的许多想法与思路都来自于王晶学姐，部分实验数据也是由王晶学姐完成的，在此向她的帮助表示衷心的感谢。

此外，感谢我在本科期间SRT项目的指导老师马惠敏副教授和在南加州大学实习期间的指导老师Gérard Medioni教授，是他们指导从专业学习走向科学研究，教会了我许多学习与研究方法，从他们身上我学到很多受用终身的知识、方法和态度。

同时，感谢我在大学四年所有任课老师和所有同学在这四年来给自己的指导和帮助，是他们教会了我清华严谨、勤奋、求实、创新的精神。正是由于他们，我才能在各方面取得显著的进步，在此向他们表示我由衷的谢意，并祝所有的老师培养出越来越多的优秀人才，桃李满天下！

最后，感谢刘为夷同学在百忙之中为我校对论文，她的细致耐心修改了文章中很多纰漏，使文章严谨准确了许多。感谢 THUTHESIS，它的存在让我的论文写作轻松自在了许多，让我的论文格式规整漂亮了许多。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：熊英　日　期：2010.6.28

附录 A　外文资料的调研阅读报告

本附录为部分参考文献的阅读报告（笔记），笔记以大纲形式给出，内容为英文。

A.1　文献[1]的阅读报告

1. Introduction
    - Parsimony: choose a limited subset of features or models from the training data, rather than directly using the data for representing or classifying an input (test) signal.
    - Sparse Representation: represent the test sample in an over-complete dictionary whose base elements are the training samples themselves.
    - Need sufficient training samples from each class.
    - Nearest Neighbor (NN) or Nearest Subspace (NS): minimum distance to the subspace spanned all training samples from each object class.
    - Nearest Feature Line (NFL): classify based on the best affine representation in terms of a pair of training samples.
    - The role of feature extraction: the precise choice of feature space is no longer critical. What is critical is that the dimension of the feature space is sufficiently large and that the sparse representation is correctly computed.
    - Robustness to occlusion: it may affect any part of the image and may be arbitrarily large in magnitude. This error typically corrupts only a fraction of the image pixels. The basis in which the error is sparse can be treated as a special class of training samples.
    - We assume that detection, cropping, and normalization of the face have been performed prior to applying our algorithm.
2. Classification based on sparse representation
    - k objects (people), each object with $n_i, i = 1, 2, , , k$ training samples, repre-

sented by a vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m, m = w \times h$.

$$\boldsymbol{A}_i = [\boldsymbol{v}_{i,1}, \boldsymbol{v}_{1,2}, ,, \boldsymbol{v}_{1,n_i}] \in \mathbb{R}^{m \times n_i}, \quad i = 1, 2, ,, k \tag{A-1}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ,, \boldsymbol{A}_k] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \tag{A-2}$$

- We shall first assume that the training samples from a single class lie on a linear subspace.
  $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ is a test sample. If $\boldsymbol{y}$ is a member of $\boldsymbol{A}_i$, we have

$$\boldsymbol{y} = \alpha_{i,1}\boldsymbol{v}_{i,1} + \alpha_{i,2}\boldsymbol{v}_{i,2}) + \cdots + \alpha_{i,n_i}\boldsymbol{v}_{i,n_i} \tag{A-3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}_0 = [0, 0, ,, 0, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \cdots, \alpha_{i,n_i}, 0, 0, ,, 0]^T \in \mathbb{R}^n \tag{A-4}$$

- For recognition,

$$\boldsymbol{y}_{m \times 1} = \boldsymbol{A}_{m \times n} \times \boldsymbol{x}_{n \times 1} \tag{A-5}$$

  typically $m < n$ in the proposed framework.
- ℓ^r-norm minimization

$$(\ell^r) : \hat{\boldsymbol{x}}_r = \arg\min \|x\|_{\ell^r}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{A-6}$$

  ℓ^2: easily solved via the pseudo-inverse of $\boldsymbol{A}$, usually dense, not informative.
  ℓ^0: sparsest representation, NP-hard
  ℓ^1: equal to ℓ^0 when x_0 is sparse enough, in polynomial time, linear with respect to n ($O(t^3 + n)$).
- Geometric interpretation, t-neighborly Loosely speaking, as long as t, the number of nonzero entries of $\boldsymbol{x}_0$ is a small fraction of the dimension m, i.e. $t \ll m$, ℓ^1-minimization will recover $\boldsymbol{x}_0$.
- Small dense noise

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{z}\| \leq \epsilon \tag{A-7}$$

  Stable ℓ^1-minimization

$$(\ell_s^1) : \hat{\boldsymbol{x}}_1 = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}, \quad \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{\ell_2} \leq \epsilon \tag{A-8}$$

- Define $\delta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, for $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\delta_i(\boldsymbol{x})$ is a new vector whose only nonzero entries are the entries in $\boldsymbol{x}$ that are associated with class i. The classification result is given by

$$\text{identity}(\boldsymbol{y}) = \arg\min_i \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_2} \tag{A-9}$$

- Algorithm 1, Sparse Representation-based Classification (SRC)
  Normalize the columns of A to have unit ℓ^2-norm.
- Validation: A valid test image should have a sparse representation whose nonzero entries concentrate mostly on one subject, whereas an invalid image has sparse coefficients spread widely among multiple subjects.
  Sparsity Concentration Index (SCI):

$$\text{SCI}(\boldsymbol{x}) = \frac{k \cdot \max_i \frac{\|\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_1}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}} - 1}{k - 1} \in [0, 1] \tag{A-10}$$

  If $\text{SCI}(\boldsymbol{x}) = 1$, the test image is represented using only images from a single object, and if $\text{SCI}(\boldsymbol{x}) = 0$, the sparse coefficients are spread evenly over all classes.

  Rather than relying on a single statistic for both validation and identification, our approach separates the information required for these tasks: the residuals for identification and the sparse coefficients for validation.

3. Two fundamental issues in face recognition
   - Suppose the feature transformation involves only linear operations, the projection from the image space to the feature space can be represented as a matrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{d \times m}$ with $d \ll m$. Applying $\boldsymbol{R}$ to both sides of

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0, \quad \tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^d \tag{A-11}$$

     Typically, $d < n$, and the equation is underdetermined.
     Reduced ℓ^1-minimization

$$(\ell_r^1) : \hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|x\|_1, \quad \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 \leq \epsilon \tag{A-12}$$

     Increasing the dimension d of the feature space generally improves the recognition rate.

If the solution $\boldsymbol{x}_0$ is sparse enough, then with overwhelming probability, it can be correctly recovered via ℓ^1-minimization from any sufficiently large number d of linear measurements $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$. More precisely, if $\boldsymbol{x}_0$ has $t \ll n$ non-zeros, the threshold for d is

$$d \geq 2t \cdot log(n/d) \tag{A-13}$$

- Randomfaces: Consider a transform matrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{d \times m}$ whose entries are independently sampled from a zero-mean normal distribution, and each row is normalized to unit length. The row vectors of $\boldsymbol{R}$ can be viewed as d random faces in $\mathbb{R}^m$.
- Occlusion and Corruption

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0, \quad \boldsymbol{e}_0 \in \mathbb{R}^m \tag{A-14}$$

$\boldsymbol{e}_0$ has a small fraction of non-zeros.

The locations of corruption can differ for different test images and are not known to the computer. The errors may have arbitrary magnitude and therefore cannot be ignored.

Redundancy: when dealing with occlusion and corruption, we should always work with the highest possible resolution (original image).

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_0 = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}][\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{e}_0]^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}, \boldsymbol{w}_0 \in \mathbb{R}^{m+n} \tag{A-15}$$

If the occlusion $\boldsymbol{e}_0$ covers less than $(m - n_i)/2$ pixels, $\approx$ 50 percent of the image, the sparsest solution is correct.

More generally, one can assume that the corrupting error $\boldsymbol{e}_0$ has a sparse representation with respect to some basis $\boldsymbol{A}_e \in \mathbb{R}^{m @ n_e}$. That is $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{A}_e\boldsymbol{u}_0$, and $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{R}^{n_e}$ is sparse. Then

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_e][\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{u}_0]^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times (m+n_e}, \boldsymbol{w}_0 \in \mathbb{R}^{m+n_e} \tag{A-16}$$

Largest fraction of occlusion under which we can hope to still achieve perfect reconstruction is 33 percent.

When considered occlusion and corruption, we do not need the ϵ in (ℓ_s^1).

For classification

$$\text{identity}(\boldsymbol{y}) = \arg\min_i \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\delta_i(\boldsymbol{x})\|_{\ell_2} \tag{A-17}$$

4. Experimental verification
5. Conclusions and discussions
   - An intriguing question for future work is whether this framework can be useful for object detection, in addition to recognition.
   - From a practical standpoint, it would also be useful to extend the algorithm to less constrained conditions, especially variations in object pose.

A.2 文献[2]的阅读报告

1. Introduction
2. System Overview

   Training set acquisition Our system acquires six training images per subject, five taken with directional illuminations provided by an array of camera flashes, and one taken under ambient illumination.

   Face detection and alignment We first perform coarse face localization using the popular Viola-Jones detector. Then, global appearance and physiological properties are used to locate the two pupils and two mouth corners. These four features are then mapped to a canonical configuration via a projective transformation. Our system also provides a graphical interface for easy manual face alignment.

   Robust recognition Use method in [1] to perform recognition and deal with occlusion
3. Interactive Demo

A.3 文献[3]的阅读报告

1. Introduction
   - Two critical problems in real-world face recognition: variations in image domain (registration) and image value (illumination).
2. Handling Practical Registration Error

- As in [1], consider the recognition problem

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e} \tag{A-18}$$

  But the image is wrapped by some transformation $\tau \in T$, that is $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 \circ \tau^{-1}$. T is a finite-dimensional group of transformations acting on the image domain.

- The problem

$$\hat{\tau} = \arg\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{e},\tau} \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{e}\|_1, \qquad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} \circ \tau = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} \tag{A-19}$$

  is difficult and non-convex, we consider the following instead

$$\hat{\tau}_i = \arg\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{e},\tau_i} \|\boldsymbol{e}\|_1, \qquad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} \circ \tau_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} \tag{A-20}$$

- Adaptively solve the problem

$$\Delta\hat{\tau}_1 = \arg\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{e},\Delta\tau} \|e\|_1, \qquad \text{subject to} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{J}\Delta\tau = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} \tag{A-21}$$

  from a reasonable registration, where $\boldsymbol{J} = \frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{y} \circ \tau$ is the Jacobian of $\boldsymbol{y} \circ \tau$.

- The normalization of both training sets and test images are important, for test image, use $\boldsymbol{y} \circ \tau = \frac{\boldsymbol{y}\circ\tau}{\|\boldsymbol{y}\circ\tau\|_2}$ instead of $\boldsymbol{y} \circ \tau$ itself.
- Algorithm 1 Deformable Sparse Recovery and Classification for Face Recognition

  The class of deformation T is important.
- Simulations and experiments on region of attraction.
- Relationship to existing work.

3. Handling Practical Illumination Variation

   Problem : in practice, a training database consisting purely of frontal illuminations is not sufficient to linearly interpolate images of a faces taken under typical indoor or outdoor conditions

   Solution : design a system that can illuminate the subject from all directions above horizontal, while acquiring the subject's frontal images.

4. Overall System Evaluation
5. Conclusion

A.4 文献[4]的阅读报告

1. Introduction

   Compressive sampling can reconstruct high-resolution signals or images with far fewer data/ measurements compared to traditional Nyquist/ Shannon theory. It suggests ways to economically translate analog data into already compressed digital form. It is also known as “compressive sensing”, “compressed sensing”, etc.

2. Undersampled measurements

   - Reconstructing a vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ from linear measurements $\boldsymbol{y}$:

     $$y_k = \langle \boldsymbol{x}, \phi_k \rangle, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{A-22}$$

     Or

     $$\boldsymbol{y}_{n\times 1} = \boldsymbol{\Phi}_{n\times m} \boldsymbol{x}_{m\times 1} \tag{A-23}$$

     We consider the under-sampled case $K \ll N$.

     Suppose that the signal $\boldsymbol{x}$ is compressible, meaning that it essentially depends on a number of degrees of freedom which is smaller than N.

   - We will say that a vector $\boldsymbol{x}$ is S-sparse if its support $i : \boldsymbol{x}_i = 0$ is of cardinality less or equal to S.

     ℓ_1-norm minimization problem

     $$(P_1) : \tilde{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|x\|_{\ell_1}, \qquad \text{subject to } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi x} \tag{A-24}$$

     (P_1) can be cast as convex program or even linear program.

   - **Theorem 2.1**: $\boldsymbol{x}$ is S-sparse. Given K uniformly selected Fourier coefficients, and if $K \geq C \cdot S \cdot \log N$. Then (P_1) reconstructs $\boldsymbol{x}$ exactly with overwhelming probability. (C is a constant.)

     The bound $S \cdot \log N$ is tight.

     Reversing the role of time and frequency, we can reconstruct a signal with arbitrary and unknown frequency support of size B from about $B \cdot logN$ arbitrarily chosen samples in the time domain, while the Nyquist theory needs N.

3. The Mathematics of compressive sampling

- Consider $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ as the coefficients of a signal $f \in \mathbb{R}^N$ in an orthogonal basis Ψ:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i, \Psi_i(t), \quad t = 1, 2, \cdots, N \tag{A-25}$$

  Written in matrix form:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi f} \text{ or } \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Psi}^* \boldsymbol{x} \tag{A-26}$$

  Where $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is a matrix with Ψ_i as rows, Ψ^* is its complex transpose. We say $\boldsymbol{f}$ is sparse in Ψ domain if $\boldsymbol{x}$ is supported in a small set, and $\boldsymbol{f}$ compressible if $\boldsymbol{x}$ concentrated near a small set.

  For an under-sampled data $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi f} = \boldsymbol{\Phi\Psi}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ can be recovered through an ℓ_1-norm minimization if it is sparse.

- Uniform uncertainty principle (UUP)

  For $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{K \times N}, T \subset \{1, 2, \cdots, N\}$, define $\boldsymbol{\Phi}_T$ as the sub-matrix of $\boldsymbol{\Phi}$ by extracting its columns corresponding to the indices in T. The S-restricted isometry constant δ_S of $\boldsymbol{\Phi}$ is defined as the smallest quantity such that

$$(1 - \delta_S)\|\boldsymbol{c}\|_{\ell_2}^2 \leq \|\boldsymbol{\Phi}_T \boldsymbol{c}\|_{\ell_2}^2 \leq (1 + \delta_S)\|\boldsymbol{c}\|_{\ell_2}^2 \tag{A-27}$$

  for all $T \subset \{1, 2, \cdots, N\}, |T| \leq S$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{|T|}$.

- **Theorem 3.1** Assume that $\boldsymbol{x}$ is S-sparse and suppose that $\delta_{2S} + \delta_{3S} < 1$ or, better, $\delta_{2S} + \theta_{S,2S} < 1$. Then the solution to (P_1) is exact.

  $\theta_{S,S'}$, S-restricted orthogonality constants, is defined as the smallest quantity such that

$$|\langle \boldsymbol{\Phi}_T \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\Phi}_{T'} \boldsymbol{c}' \rangle| \leq \theta_{S,S'} \|\boldsymbol{c}\|_{\ell_2}^2 \|\boldsymbol{c}'\|_{\ell_2}^2 \tag{A-28}$$

  for all disjoint sets $T, T' \subset \{1, 2, , , N\}, |T| \leq S, |T'| \leq S', S + S' \leq N$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{|T|}, \boldsymbol{c}' \in \mathbb{R}^{|T'|}$.

- Given $\boldsymbol{x}$, defined $\boldsymbol{x}_S$ as the approximation of $\boldsymbol{x}$ by keeping the largest S entries and setting the others to zero.

  Theorem 3.2 Assume that $\boldsymbol{x}$ is S-sparse (?) and suppose that $\delta_{3S} + \delta_{4S} < 2$,

then $\boldsymbol{x}^*$, the solution to (P_1), satisfies

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|_{\ell_2} \leq \boldsymbol{C} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_1} / \sqrt{S} \tag{A-29}$$

Suppose further that $\delta_S + 2\theta_{S,S} + \theta_{S,2S} < 1$, then

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|_{\ell_1} \leq \boldsymbol{C} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_1} \tag{A-30}$$

$\boldsymbol{C}$ is a well-behaved constant.

Weak ℓ_p-ball example

- A design problem: How to design a matrix Φ, a collection of N vectors in K dimensions ($N \gg K$),so that any subset of columns of size about S be about orthogonal?

  Example: Sample N vectors on the unit sphere of $\mathbb{R}^K$ independently and uniformly at random. Then the condition of **Theorems 3.1** and **3.2** hold for $S = O(K/\log(N/K))$ with overwhelming probability.

  Gaussian measurements, Binary measurements, Fourier measurements and Incoherent measurements.

- Optimality: The results - specialized to Gaussian measurements - are optimal for weak-ℓ_p norms.

4. Robust compressive sampling

   - Suppose our observations are inaccurate and consider the model

   $$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi x} + \boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^K, \|\boldsymbol{e}\|_{\ell_2} < \epsilon \tag{A-31}$$

   A new reconstruction program that relaxes the data fidelity term

   $$(P_2) : \tilde{\boldsymbol{x}} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}, \quad \text{subject to} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi x}\|_{\ell_2} < \epsilon \tag{A-32}$$

   - **Theorem 4.1** Suppose that $\boldsymbol{x}$ is an arbitrary vector in $\mathbb{R}^N$ and suppose that $\delta_{3S} + \delta_{4S} < 2$, then $\boldsymbol{x}^*$, the solution to (P_2), satisfies

   $$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|_{\ell_2} \leq \boldsymbol{C}_{1,S} \cdot \epsilon + \boldsymbol{C}_{2,S} \cdot \frac{\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_{0,S}\|_{\ell_1}}{\sqrt{S}} \tag{A-33}$$

   The constants is well behaved for reasonable δ_{4S}. $\boldsymbol{x}_0$ is the ground truth data (without perturbations).

5. Connection with statistical estimation

6. Connection with error correction
7. Future Topics

A.5 文献[5]的阅读报告

1. Introduction
   - Compressive sensing theory can recover signals and images from far fewer samples and measurements than traditional methods (Nyquist/ Shannon theory).
   - It relies on two principles: sparsity and incoherent.
     Sparsity: The signal has a concise representation in a proper basis Ψ Incoherent: The sparse signal in basis Ψ must be spread out in the acquisition domain.
2. The sensing problem
   - Sensing mechanism for $\boldsymbol{f}(t) \in \mathbb{R}^n$

$$y_k = \langle \boldsymbol{f}, \phi_k \rangle, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{A-34}$$

3. Incoherence and the sensing of sparse signals
   - Sparsity:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i, \Psi_i(t), \quad t = 1, 2, \cdots, N \tag{A-35}$$

     Define $\boldsymbol{x}_S$ as in [4], $\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{x}_S$. Since $\boldsymbol{\Psi}$ is an orthonormal basis, we have

$$\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_S\|_{\ell_2} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_2} \tag{A-36}$$

     So if $\boldsymbol{x}_S$ well approximates $\boldsymbol{x}$, the error $\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_S\|_{\ell_2}$ is small.
     Traditional methods compute $\boldsymbol{x}$ from $\boldsymbol{f}$ (adaptively) and then find the largest S entries.
   - **Theorem 1** $\boldsymbol{x}$ is S-sparse. If

$$m \geq \boldsymbol{C} \cdot \mu^2(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}) \cdot S \cdot \log N \tag{A-37}$$

     Then (P_1) in [4] reconstructs $\boldsymbol{x}$ exactly with overwhelming probability. (C is a constant.)

- The role of probability: There are special sparse signals that vanish nearly everywhere in the $\mathbf{\Phi}$ domain, but such signal occurs in an extremely small probability.

4. Robust compressive sampling
   - Two issues:

     1) General objects of interest are not exactly sparse but approximately sparse.

     2) Measured data will invariably be corrupted by at least a small amount of noise.
   - **Theorem 2** If $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$, then $\boldsymbol{x}^*$, the solution to (P_1), satisfies

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|\_\ell_2 \leq \boldsymbol{C} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_1} / \sqrt{S} \tag{A-38}$$

     and

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|_{\ell_1} \leq \boldsymbol{C} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_1} \tag{A-39}$$

     For constant C. This theorem is deterministic (involves no probability). Also refer to **Theorem 3.2** in [4]. We also need to know how large the m is for $\mathbf{\Phi}$ to satisfy $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$.
   - **Theorem 3** If $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$, then $\boldsymbol{x}^*$, the solution to (P_2), satisfies

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}\|_{\ell_2} \leq \boldsymbol{C}_{1,S} \cdot \epsilon + C_{2,S} \cdot \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S\|_{\ell_1}}{\sqrt{S}} \tag{A-40}$$

     Also see **Theorem 4.1** in [4].
   - Random sampling: Four typical random sensing method obey restricted isometry property (RIP, e.g. $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$) with overwhelming probability provided that

$$m \geq C \cdot S \cdot \log(n/S) \tag{A-41}$$

     Together with **Theorem 2**, it indicates that randomized matrics with ℓ_1 normalization is near-optimal.

     For $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}$ where $\boldsymbol{R}$ extracts m coordinates uniformly at random, it is

sufficient to have

$$m \geq C \cdot S \cdot (\log n)^4 \tag{A-42}$$

5. What is compressive sampling
   - Reed-Solomon (RS) codes
6. Applications

A.6 文献[6]的阅读报告

1. Introduction
   - Problems of ordinary least squares (OLS): 1) prediction accuracy (small bias but large variance) 2) interpretation (often need a smaller subset of predictors)
   - Drawbacks of subset selection and ridge regression
   - Lasso (least absolute shrinkage and selection operator): shrink the coefficients and set others to exact 0.
2. The Lasso
   - A set of data $(\boldsymbol{x}^i, y_i), i = 1, 2, \cdots, N$ where $\boldsymbol{x}^i = (\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{x}_{ip})$ are predictors and y_i are responses. Assume that the observations are independent and

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N \tag{A-43}$$

   - The lasso problem is defined as

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg\min \sum_{i=1}^{N} \left(y - \hat{\alpha} - \sum_j \hat{\beta}_j x_{ij} \right)^2, \qquad \text{subject to} \sum_j \hat{\beta}_j \leq t \tag{A-44}$$

     For all t, $\hat{\alpha} = \bar{y}$ always holds, and we assume $\bar{y} = 0$.
   - Garotte: start with OLS and shrink the coefficients.
   - Relationship between different algorithms with OLS in orthonormal case.
   - Lasso does not retain signs of OLS
   - Two-predictor cases, effects of correlation, difference between lasso and garotte.

3. Example - Prostate Cancer Data
4. Prediction Error and Estimation of t
   - First method (cross-validation): Suppose that $Y = \eta(\boldsymbol{X}) + \epsilon$, where $E(\epsilon) = 0, var(\epsilon) = \sigma^2$. For linear models, $\eta(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\hat{\beta}$ Given an estimate $\hat{\eta}(\boldsymbol{X})$ we define

     $$ME = E\left\{(\hat{\eta}(\boldsymbol{X}) - \eta(\boldsymbol{X}))^2\right\}, \qquad PE = E\left\{(Y - \hat{\eta}(\boldsymbol{X}))^2\right\} = ME + \sigma^2 \quad \text{(A-45)}$$

     Let $s = \frac{t}{\sum \hat{\beta}_j^0} \in [0, 1]$, and $\hat{s}$ with smallest PE is selected. (β_j^0 is the estimate given by OLS)
   - Second method (generalized cross-validation)
   - Third method (Stein's unbiased estimate): computational advantage
5. Lasso as Bayes Estimate
6. Algorithms for Finding Lasso Solutions
7. Simulations
8. Applications to Generalized Regression Models
9. Some Further Extensions
10. Results on Soft Thresholding
11. Discussion
12. Software

A.7 文献[7]的阅读报告

1. Introduction
   - Forward selection: overly greedy, eliminate correlation

     Forward stagewise: high computation complexity

     Least angle regression: larger step for forward stagewise, can be modified to solve lasso
   - Suppose $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ are independent, and

     $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1, \quad \text{and} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \qquad \text{(A-46)}$$

For an estimate $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_m)$, define

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2, \quad T(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sum_{i=1}^{m} |\beta_i| \tag{A-47}$$

- The lasso problem is defined as

$$\text{minimize} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}), \qquad \text{subject to} \qquad T(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \leq t \tag{A-48}$$

  Also see [6].

- (Forward) stagewise regression

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) \tag{A-49}$$

$$\hat{j} = \arg\max |\hat{c}_j| \tag{A-50}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} \leftarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} + \epsilon \cdot \text{sign}(\hat{c}_{\hat{j}}) \cdot \boldsymbol{x}_{\hat{j}} \tag{A-51}$$

  ϵ is the step.

2. The LARS Algorithm

- Only m (number of covariates) steps are required
- For $A \subset \{1, 2, ,, m\}$, define

$$\boldsymbol{X}_A = [s_{j_1}\boldsymbol{x}_{j_1}, \cdots, s_{j_k}\boldsymbol{x}_{j_k}] \in \mathbb{R}^{n \times k} \tag{A-52}$$

$$\boldsymbol{G}_A = \boldsymbol{X}_A^T\boldsymbol{X}_A \qquad A_A = \left(\mathbf{1}_A^T\boldsymbol{G}_A^{-1}\mathbf{1}_A\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{A-53}$$

$$\boldsymbol{w}_A = A_A\boldsymbol{G}_A^{-1}\mathbf{1}_A \qquad \boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{w}_A \tag{A-54}$$

  $\boldsymbol{u}_A$ is the equiangular vector of $\boldsymbol{X}_A$

- Suppose $\hat{\boldsymbol{\mu}}_A$ is the current LARS estimate

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_A) \tag{A-55}$$

$$C = \max_j\{|c_j|\} \tag{A-56}$$

$$A = \{j : |c_j| = C\} \tag{A-57}$$

$$s_j = \text{sign}(c_j) \tag{A-58}$$

  Calculate $\boldsymbol{u}_A$ as before, and

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}_A \tag{A-59}$$

Then the new estimate is

$$\boldsymbol{\mu}_{A_+} = \boldsymbol{\mu}_A - \hat{\gamma}\boldsymbol{u}_A \tag{A-60}$$

$$\hat{\gamma} = \min_{j \notin A}^{+} \left\{ \frac{C - c_j}{A_A - a_j}, \frac{C + c_j}{A_A + a_j} \right\} \tag{A-61}$$

$$A_+ = A \cup \{\hat{j}\} \tag{A-62}$$

$$\hat{C}_+ = \hat{C} - \gamma A_A \tag{A-63}$$

For the last step, LARS goes to OLS.

3. Modification versions of Least Angle Regression
   - Restriction of lasso solution $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\text{sign}(\hat{\beta}_j) = \text{sign}(\hat{c}_j) = s_j \tag{A-64}$$

Lasso modification: at certain step, define

$$\gamma_j = -\frac{\hat{\beta}_j}{d_j}, \qquad \tilde{\gamma} = \min_{j}^{+}\{\gamma_j\} \tag{A-65}$$

If $\tilde{\gamma} < \hat{\gamma}$,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{A_+} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_A + \tilde{\gamma}\boldsymbol{u}_A, \qquad A_+ = A - \{\tilde{j}\} \tag{A-66}$$

   - Restriction of stagewise

     Stagewise modification
   - Positive lasso:

$$\hat{\beta}_j \geq 0, \forall j \tag{A-67}$$

Modification

$$s_j = 1, \qquad \hat{\gamma} = \min_{j \notin A}^{+} \left\{ \frac{C - c_j}{A_A - a_j} \right\} \tag{A-68}$$

   - Other modifications
4. Degrees of Freedom and C_p Estimates
   - For an estimator $\hat{\boldsymbol{\mu}} = g(\boldsymbol{y})$, assume $\boldsymbol{y}$ $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$, we have

$$E\left\{ \frac{\|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2} \right\} = \frac{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2}{\sigma^2} - n + 2df_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2} \tag{A-69}$$

$$df_{\mu,\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{cov}(\hat{\mu}_i, y_i)}{\sigma^2} \tag{A-70}$$

- For LARS, $df_{\mu,\sigma^2} = k$ under certain conditions.
- For lasso, the degrees of freedom is well approximated by the number of non-zero predictors in the model (Empirical result, no mathematical support)

5. LARS and Lasso Properties
6. Stagewise Properties
7. Computation
   - For $m < n$, the complexity is $O(m^3 + m^2 n)$
   - For $m \geq n$, the complexity is $O(n^3)$
8. Boosting Procedures
9. Appendix

在学期间参加课题的研究成果

个人简历

1987 年 3 月 16 日出生于辽宁省大连市。

1994 年 9 月至 2000 年 6 月就读于大连市桃园小学。

2000 年 9 月至 2003 年 6 月就读于大连市第四十四中学。

2003 年 9 月至 2006 年 6 月就读于大连市第二十四中学。

2006 年 8 月至 2007 年 6 月就读于清华大学物理系数学物理基础专业。

2007 年 8 月至今就读于清华大学电子工程系电子信息科学与技术专业。

发表的学术论文

[1] 熊英,马惠敏 SIFT特征在三维物体识别中的应用. 图像图形技术研究与应用2009——第四届图像图形技术与应用学术会议论文集, 北京. pp.290-294

[2] 熊英,马惠敏 3维物体SIFT特征的提取与应用. 中国图像图形学报, 2010, 15(5), pp.814-819

综合论文训练记录表

学生姓名	熊英	学号	2006012105	班级	无 62
论文题目	基于 Lasso 的人脸识别算法				

主要内容以及进度安排

3 月 1 日至 3 月 18 日：文献阅读与调研，撰写调研笔记与开题报告

3 月 19 日至 4 月 4 日：研究 Lasso 问题的理论基础和算法实现

4 月 5 日至 4 月 18 日：完成 LARS 算法的 MATLAB 和 C 代码实现

4 月 19 日至 5 月 9 日：实现并完善基于 Lasso 的人脸识别系统

5 月 10 日至 5 月 30 日：研究人脸特征、约束采样与几何特征的鲁棒性

5 月 31 日至 6 月 13 日：对人脸识别系统进行大规模测试

6 月 14 日至 6 月 27 日：毕业论文的撰写与答辩准备

指导教师签字：

考核组组长签字：

2010 年 3 月 18 日

中期考核意见

通过.

考核组组长签字：

2010 年 6 月 27 日

指导教师评语	论文作者在理论上论述了基于Lasso的人脸识别算法。提出了约束采样技术，在处理特征还融合了几何特征，并在C代码上实现了改进的Lasso算法。该算法在AR库和CAS-PEAC库达到了高的人脸识别率。 论文理论正确，创新性强，是一篇优秀论文。 指导教师签字：黄宅大 2010 年 6 月28日
评阅教师评语	基于稀疏表示的人脸识别近来广受学术界关注。该生对算法中的关键步骤，Lasso优化，进行了分析；并在前人工作基础上，提出将LARS算法引入Lasso优化求解，实现了高效的优化过程。该生进一步研究了基于稀疏表示的人脸识别算法中人脸特征的选取及融合问题，取得了很好的识别效果。工作具有理论意义和实用价值。 评阅教师签字：陈健生 2010年 6 月28日
答辩小组评语	答辩叙述清楚，回答问题正确。论文工作表明作者具有扎实的理论基础和非常好的科研能力。推荐参加优秀毕业论文评选。 答辩小组组长签字：[illegible] 2010 年 6 月29日

总成绩：95

教学负责人签字：[illegible]

2010 年 7月1 日